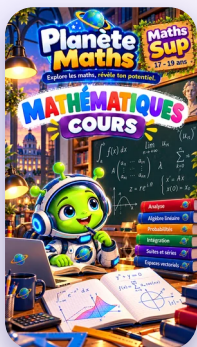


Dérivation et développements limités : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

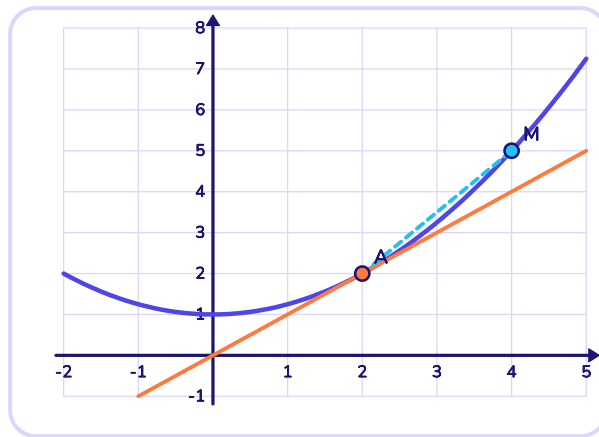
[Voir le livre](#)

La dérivation mesure la variation instantanée d'une fonction ; les développements limités en font un outil d'approximation polynomiale précis au voisinage d'un point. Ce chapitre rassemble les théorèmes de base de l'analyse réelle de première année : Rolle, accroissements finis, convexité, formule de Taylor-Young, puis le calcul pratique des limites.

1. Nombre dérivé et dérivées usuelles

D Nombre dérivé

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand $h \rightarrow 0$. Cette limite est notée $f'(a)$. Géométriquement, la tangente en $A(a; f(a))$ a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.



Une fonction dérivable en a est continue en a ; la réciproque est fautive : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable (dérivées à gauche et à droite égales à -1 et 1).

Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x ; \cos x$	$\cos x ; -\sin x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Opérations : $(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.
 La formule de Leibniz donne $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$.

E

Exemple 1

Pour $f(x) = x \ln x$, on a $f'(x) = \ln x + 1$. En $a = e$: $f(e) = e$ et $f'(e) = 2$, donc la tangente a pour équation $y = e + 2(x - e) = 2x - e$.

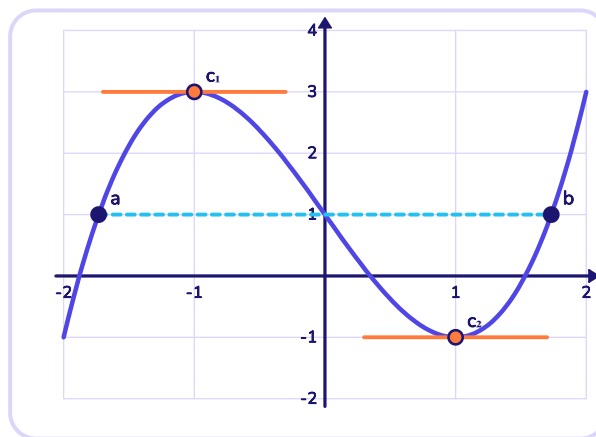
2. Théorème de Rolle

P

Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Idée de la preuve : f continue sur un segment atteint un maximum et un minimum. Si l'un des deux est atteint à l'intérieur, la dérivée y est nulle ; sinon f est constante.



⚠

Erreur classique

Les trois hypothèses sont indispensables : $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$ vérifie $f(-1) = f(1)$ mais sa dérivée ne s'annule jamais, car elle n'est pas dérivable en 0.

Conséquence usuelle : entre deux racines d'un polynôme dérivable se trouve une racine de sa dérivée, ce qui permet de borner le nombre de racines réelles.

3. Égalité des accroissements finis

P Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Preuve : on applique Rolle à $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, qui vérifie $g(a) = g(b) = f(a)$.

L'inégalité des accroissements finis en découle : si $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$. On en déduit aussi que $f' \geq 0$ sur un intervalle équivaut à f croissante, et que $f' > 0$ entraîne f strictement croissante.

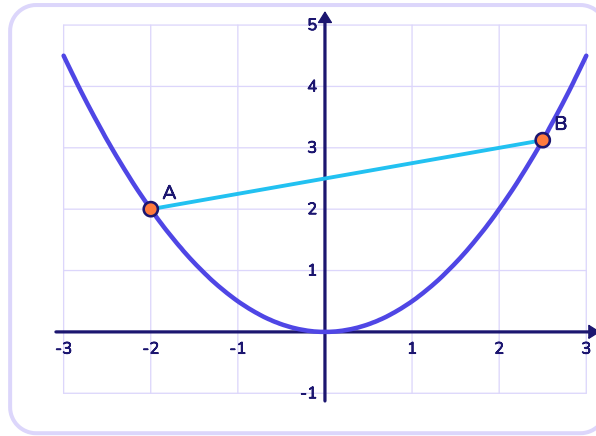
E Exemple 2

Pour $f = \ln$ sur $[1, 1 + x]$ avec $x > 0$: $\ln(1 + x) = \frac{x}{c}$ avec $c \in]1, 1 + x[$.

4. Fonctions convexes

D Convexité

f est **convexe** sur I si, pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$,
 $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$: la corde est au-dessus de la courbe. f est **concave** si $-f$ est convexe.



P

Caractérisations

Pour f dérivable, f est convexe $\iff f'$ est croissante $\iff$ la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes. Pour f deux fois dérivable : convexe $\iff f'' \geq 0$. Un point où f'' s'annule en changeant de signe est un **point d'inflexion**.

Exemples d'inégalités classiques : $e^x \geq 1 + x$ (position de **exp** par rapport à sa tangente en 0) et $\ln(1 + x) \leq x$.

5. Formule de Taylor-Young

P

Taylor-Young

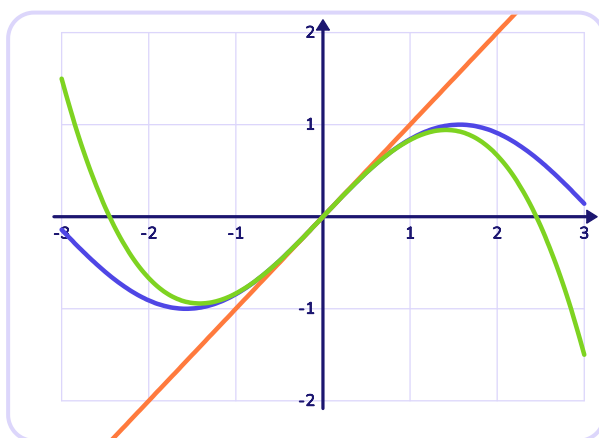
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a (ou seulement n fois dérivable en a), alors

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Le terme $o(h^n)$ désigne une quantité de la forme $h^n \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$. Le polynôme obtenu est le **développement limité (DL)** de f à l'ordre n en a ; il est unique. Un DL à l'ordre 1 équivaut à la dérivabilité : $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.

6. Développements limités usuels en 0

Fonction	Développement limité
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$



Plus l'ordre est élevé, plus le polynôme colle à la fonction près de **0** : la droite $y = x$ approche **sin** à l'ordre 1, la cubique $y = x - \frac{x^3}{6}$ à l'ordre 3.

7. Opérations sur les développements limités

- **Somme** : on additionne les polynômes, à l'ordre le plus petit.
- **Produit** : on multiplie les polynômes et on tronque au degré n .
- **Composition** : si $u(x) \rightarrow 0$, on substitue le DL de u dans celui de g , puis on tronque.
- **Quotient** : on écrit $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \dots$ avec $u \rightarrow 0$.
- **Dérivation** d'un DL : possible si f' admet un DL ; **intégration** terme à terme toujours possible.

M

Méthode : produit de DL

1. Fixer l'ordre n demandé.
2. Écrire chaque DL à l'ordre n (au moins).
3. Développer, ne garder que les puissances $\leq n$.
4. Conclure avec $o(x^n)$.

E

Exemple 3

À l'ordre 3 :

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

⚠

Erreur classique

Perdre un ordre : pour diviser par x ou x^2 plus tard, développe le numérateur à un ordre plus élevé que l'ordre final souhaité.

8. Applications aux limites

Un DL donne un **équivalent** (premier terme non nul) et permet de lever les formes indéterminées.

Il donne aussi la position d'une courbe par rapport à sa tangente : si

$f(x) = f(0) + f'(0)x + ax^k + o(x^k)$ avec $a \neq 0$, le signe de ax^k indique la position.

E Exemple 4

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-x^3/6 + o(x^3)}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}. \text{ De même } \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$



Astuce de Zyro

Sur ma planète on dit : « un DL, c'est un microscope ». Pour une limite en **0**, développe chaque morceau jusqu'à ce que les termes ne s'annulent plus tous : le premier terme survivant te donne la réponse.

À retenir

- f dérivable en a : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$, tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- Rolle : continue, dérivable, $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$. Accroissements finis : $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
- Convexe $\iff f'$ croissante $\iff f'' \geq 0 \iff$ courbe au-dessus de ses tangentes.
- Taylor-Young : $f(a+h) = \sum_{k \leq n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$.
- Connais par cœur les DL de e^x , **sin**, **cos**, **ln**(1+x), $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$.
- Pour une limite : développe à l'ordre juste suffisant et lis le premier terme non nul.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Dérivation et développements limités :
exercices de maths Maths Sup

Contrôles de maths

Dérivation et développements limités :
contrôle de maths Maths Sup

QCM de maths

Dérivation et développements limités :
QCM de maths Maths Sup

Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de
maths Maths Sup

 Exercices de maths

Arithmétique et polynômes : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Intégration et primitives : contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage