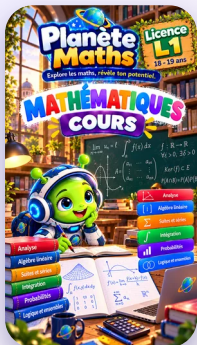


Dérivation et formules de Taylor : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dériver, c'est mesurer la vitesse de variation d'une fonction ; les formules de Taylor poussent cette idée jusqu'au bout en remplaçant une fonction compliquée par un polynôme qui lui ressemble de très près. Ce chapitre présente la dérivabilité, les trois grands théorèmes qui en découlent (Rolle, accroissements finis, convexité), puis l'approximation locale par les développements limités et leurs applications aux limites.

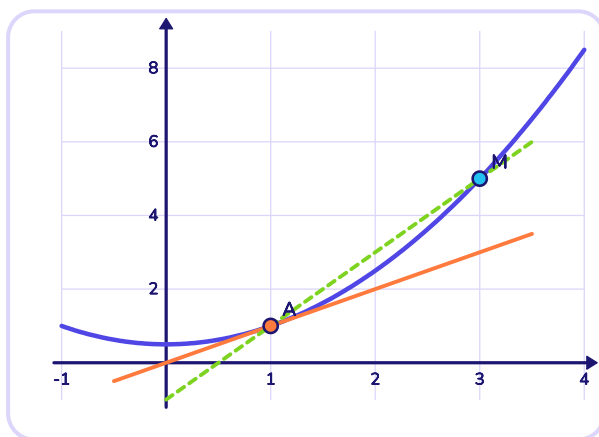
1. Dérivabilité en un point

D Définition

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand $h \rightarrow 0$ ($h \neq 0$).

Cette limite est le **nombre dérivé $f'(a)$** . La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est la **tangente** à la courbe en a .

Le taux d'accroissement est la pente de la sécante passant par $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$. Quand M glisse vers A , la sécante tend vers la tangente.



On définit de même la dérivée à gauche et la dérivée à droite (limites quand $h \rightarrow 0^-$ et $h \rightarrow 0^+$) ; f est dérivable en a exactement lorsque les deux existent et sont égales.

P Propriétés

1) Si f est dérivable en a , elle est continue en a . La réciproque est fausse. 2) Les règles de dérivation : $(u + v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$, et pour une bijection dérivable de dérivée non nulle $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

E Exemple 1 : une fonction dérivable en 0 dont la dérivée oscille (voir l'exercice 8)

Soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Le taux en 0 vaut $\frac{f(h)}{h} = h \sin \frac{1}{h}$, qui tend vers 0 car $|h \sin \frac{1}{h}| \leq |h|$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

E Exemple 2 : une dérivée composée

Pour $g(x) = \ln(1 + x^2) e^{3x}$, on obtient $g'(x) = \left(\frac{2x}{1 + x^2} + 3 \ln(1 + x^2) \right) e^{3x}$.



Attention

La valeur absolue est continue en 0 sans y être dérivable : sa dérivée à gauche vaut -1 et sa dérivée à droite vaut 1 . Continue ne veut pas dire dérivable.

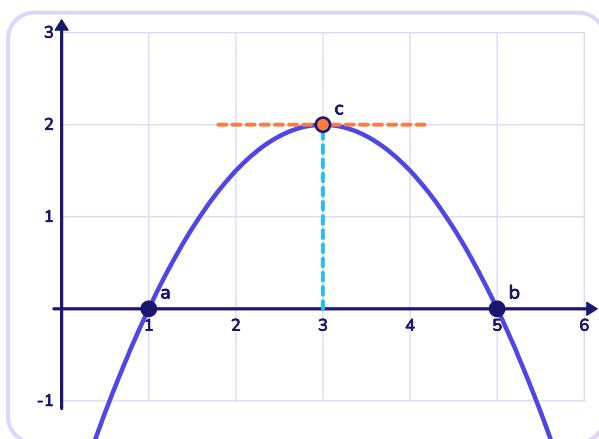
2. Le théorème de Rolle

P

Théorème de Rolle

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Idée de la preuve. Une fonction continue sur un segment atteint son maximum et son minimum. Si l'un d'eux est atteint en un point intérieur c , la dérivée y est nulle ; sinon les deux extrema sont atteints aux bornes, donc égaux, et f est constante.



E Exemple 3 : une seule racine

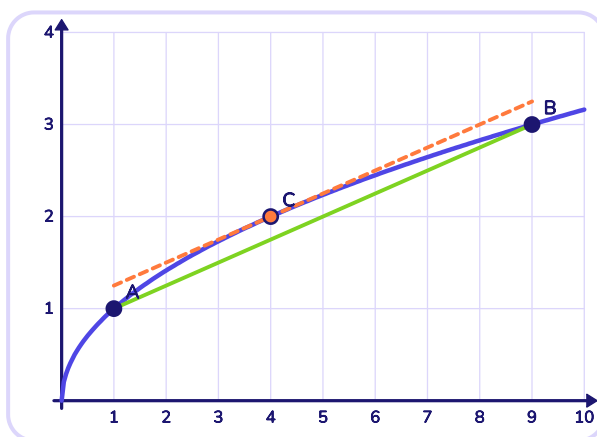
Montrons que $x^3 + 5x - 7 = 0$ a exactement une solution réelle. Posons $f(x) = x^3 + 5x - 7$: $f(1) = -1$ et $f(2) = 11$, le théorème des valeurs intermédiaires donne une racine. Si deux racines $r_1 < r_2$ existaient, Rolle fournirait c avec $f'(c) = 3c^2 + 5 = 0$, ce qui est impossible puisque $3c^2 + 5 > 0$.

3. Les accroissements finis

P Théorème des accroissements finis

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Géométriquement, il existe un point où la tangente est parallèle à la corde. On l'obtient en appliquant Rolle à $x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.



P Conséquences

1) Si $f' \geq 0$ sur un intervalle, f est croissante ; si $f' = 0$, f est constante. 2) **Inégalité des accroissements finis** : si $|f'| \leq M$ sur I , alors $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ pour tous $x, y \in I$.

E Exemple 4 : encadrer un logarithme

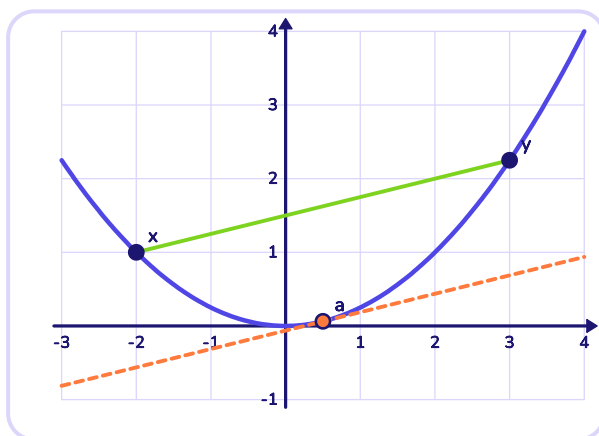
Pour $x > 0$, le théorème sur $[0, x]$ donne $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$ avec $0 < c < x$, d'où $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$. Avec $x = 0,2 : 0,1666\dots < \ln 1,2 < 0,2$.

4. Convexité

D Définition

f est **convexe** sur I si pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Elle est **concave** si $-f$ est convexe. Un point d'inflexion est un point où la convexité change de sens.



P Caractérisations

Pour f deux fois dérivable sur I : f convexe $\iff f'$ croissante $\iff f'' \geq 0 \iff$ la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes. Au point d'inflexion, f'' s'annule en changeant de signe.

E**Exemple 5 : deux inégalités classiques**

La fonction exponentielle est convexe ($f'' = e^x > 0$), donc au-dessus de sa tangente en 0 : $e^x \geq 1 + x$. La fonction $\ln$ est concave ($\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$), donc $\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$, soit $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pour $a, b > 0$.

E**Exemple 6 : inflexion**

Pour $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f''(x) = 6x - 6$: f est concave sur $] -\infty, 1]$, convexe sur $[1, +\infty[$, avec un point d'inflexion en $x = 1$.

5. La formule de Taylor-Young**P****Théorème de Taylor-Young**

Si f est n fois dérivable en a , alors, quand $h \rightarrow 0$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Le polynôme de droite est le **polynôme de Taylor** d'ordre n . Le terme $o(h^n)$ signifie « négligeable devant h^n » : c'est une formule *locale*, qui ne dit rien sur la taille de l'erreur loin de a .

E**Exemple 7 : en un point autre que 0**

Pour $f = \sin$ en $a = \frac{\pi}{4}$, toutes les dérivées valent $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec la suite de signes $+, +, -, \dots$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + h - \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2)$.

6. Taylor avec reste intégral

P Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant a et b :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Si $|f^{(n+1)}| \leq M$ entre a et b , le reste vérifie l'inégalité de Taylor-Lagrange :

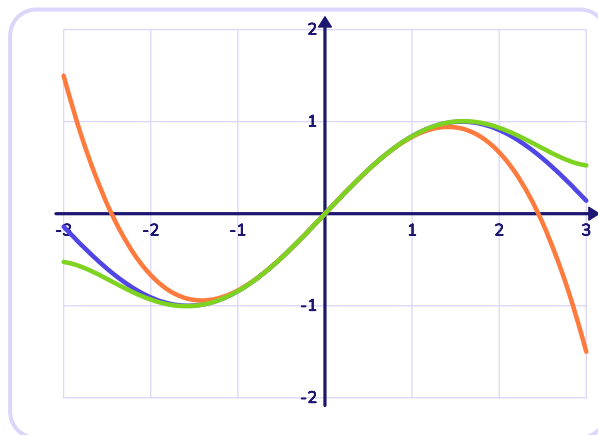
$$|R_n| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Contrairement à Taylor-Young, cette version est *globale* : elle donne une erreur contrôlée pour un b précis. La preuve se fait par récurrence, en intégrant par parties le reste.

E Exemple 8 : approcher $\sin 0,5$

Avec $f = \sin$, $a = 0$, $n = 4$: le polynôme est $x - \frac{x^3}{6}$ et $|f^{(5)}| \leq 1$, donc

$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$. Pour $x = 0,5$: $0,5 - \frac{0,125}{6} = 0,47916 \dots$ à $2,6 \times 10^{-4}$ près.



7. Développements limités

D Définition

Un **développement limité d'ordre n** en 0 de f est une écriture

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$. S'il existe, il est unique, et Taylor-Young donne $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Fonction	Développement limité en 0
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + o(x^{2p+1})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + o(x^{2p})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + o(x^n)$

On additionne et multiplie les développements en tronquant à l'ordre voulu ; pour composer, on remplace la variable par un développement qui tend vers 0 ; on peut aussi intégrer terme à terme.

M**Méthode : calculer un développement limité**

1) Choisir l'ordre en repérant le premier terme qui ne s'annule pas. 2) Écrire les développements usuels de chaque facteur à cet ordre. 3) Multiplier ou composer en ne gardant que les puissances $\leq n$. 4) Conclure avec $o(x^n)$.

E**Exemple 9 : un produit**

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \text{ car le}$$

terme en x^3 vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

E**Exemple 10 : une composée**

Pour $\ln(\cos x)$, on pose $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

!**Astuce de Zyro**

Sur ma planète, on lit la parité d'abord : une fonction paire n'a que des puissances paires dans son développement limité, une fonction impaire que des puissances impaires. Cela évite la moitié des calculs !

8. La règle de L'Hôpital**P****Règle de L'Hôpital**

Soit f, g dérivables au voisinage de a (éventuellement $a = \pm\infty$) avec $g' \neq 0$. Si $\frac{f}{g}$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ en a et si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \ell$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \ell$.

E**Exemple 11 : application répétée**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$: forme $\frac{0}{0}$; on dérive : $\frac{e^x - 1}{2x}$, encore $\frac{0}{0}$; on dérive : $\frac{e^x}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$. Ou, avec un développement limité : $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

**Attention**

La réciproque est fautive : $\frac{x + \sin x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors que le quotient des dérivées $1 + \cos x$ n'a pas de limite. Il faut aussi vérifier que la forme est bien indéterminée avant de dériver.

À retenir

- f dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a , mais pas l'inverse.
- Rolle : $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ pour un c intérieur.
- Accroissements finis : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$; si $|f'| \leq M$, f est M -lipschitzienne.
- f convexe $\iff f'' \geq 0 \iff$ courbe au-dessus de ses tangentes.
- Taylor-Young : formule locale avec $o(h^n)$; Taylor reste intégral : formule globale avec erreur majorée.
- Les développements limités usuels s'additionnent, se multiplient, se composent ; ils calculent aussi les limites.
- L'Hôpital : seulement pour une forme indéterminée, et la limite de f'/g' doit exister.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Dérivation et formules de Taylor :
exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Dérivation et formules de Taylor :
contrôle de maths Licence L1

 QCM de maths

Dérivation et formules de Taylor : QCM
de maths Licence L1

 Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Licence L1

Intégration et primitives : contrôle de
maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage