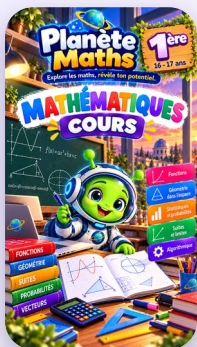


Dérivation : cours de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un chauffeur regarde son compteur, un skieur lit sa vitesse à l'arrivée d'une descente, un ingénieur cherche le prix qui rapporte le plus : tous se posent la même question, « à quelle vitesse la grandeur est-elle en train de varier *à cet instant précis* ? ». La **dérivation** y répond. Dans ce chapitre, tu vas passer d'une variation moyenne à une variation instantanée, apprendre à tracer des tangentes et à dériver sans effort grâce à quelques règles.

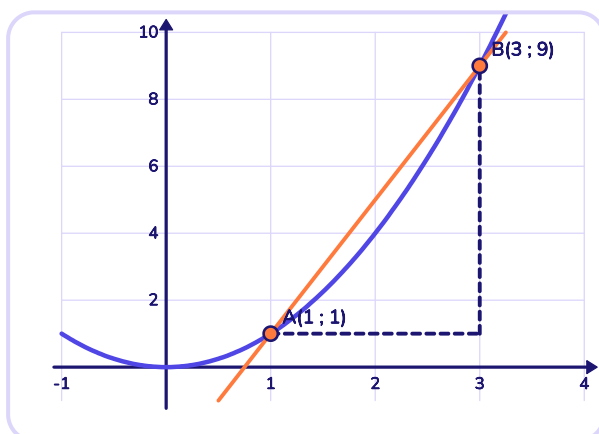
1. Le taux de variation

D Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a et b deux réels distincts de I . Le **taux de variation** de f entre a et b est le nombre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

C'est le **coefficient directeur de la sécante** à la courbe passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$. Si f décrit une distance en fonction du temps, c'est la vitesse moyenne entre les deux instants.



Plus la sécante est inclinée, plus la fonction augmente vite entre a et b ; un taux négatif signale au contraire une fonction qui diminue en moyenne. Attention : ce taux ne dit rien de ce qui se passe à l'intérieur de l'intervalle, il résume seulement le trajet entre les deux extrémités.

E Exemple 1

Pour $f(x) = x^2$ entre 1 et 3 : $f(1) = 1$ et $f(3) = 9$, donc le taux de variation vaut $\frac{9 - 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$. La sécante (AB) a pour coefficient directeur 4.

2. Le nombre dérivé

Rapprochons le point B du point A : on pose $b = a + h$ avec h de plus en plus petit. Le taux de variation devient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

D Nombre dérivé

On dit que f est **dérivable en a** lorsque le taux $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre fixe quand h se rapproche de 0 . Ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$.

Pour une voiture, $f'(a)$ est ce que lit le compteur de vitesse à l'instant a : une vitesse **instantanée**. Pour une courbe, c'est la pente exacte de la courbe au point d'abscisse a . Si le taux ne se stabilise sur aucun nombre, comme à la pointe de la courbe de la valeur absolue en 0 , la fonction n'est pas dérivable en ce point.

E Exemple 2

Pour $f(x) = 3x^2 - x$ en $a = 2$: $f(2) = 10$ et
 $f(2+h) = 3(4 + 4h + h^2) - 2 - h = 10 + 11h + 3h^2$.

Le taux vaut $\frac{11h + 3h^2}{h} = 11 + 3h$ pour $h \neq 0$. Quand h tend vers 0 , il tend vers 11 : $f'(2) = 11$.

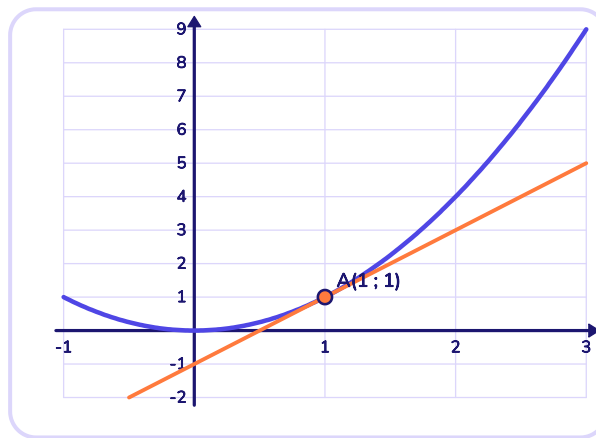
Le même calcul fonctionne pour un point a quelconque. Pour $f(x) = x^2$:
 $f(a+h) - f(a) = 2ah + h^2$, donc le taux vaut $2a + h$, qui tend vers $2a$. On a démontré que $(x^2)' = 2x$, et en particulier $f'(1) = 2$.

3. La tangente à une courbe

P Tangente

Si f est dérivable en a , la courbe admet au point $A(a; f(a))$ une **tangente** de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



M Méthode : déterminer une tangente

1. Calcule $f(a)$: c'est l'ordonnée du point de contact.
2. Dérive f , puis calcule $f'(a)$: c'est la pente.
3. Remplace dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et simplifie.

E Exemple 3

Pour $f(x) = x^2$ en $a = 1$: $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$ (démontré plus haut). La tangente est $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$, ce que montre la figure.



Piège

Le nombre dérivé $f'(a)$ est un **coefficient directeur**, pas une ordonnée. N'oublie ni de multiplier par $(x - a)$, ni d'ajouter $f(a)$ à la fin.

4. La fonction dérivée et les dérivées usuelles

Quand f est dérivable en tout point d'un intervalle I , on définit la **fonction dérivée** f' qui à chaque x associe $f'(x)$. Plutôt que de recalculer une limite à chaque fois, on utilise ce tableau à connaître.

Fonction f	Dérivée f'	Valable sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \geq 1$ entier)	$f'(x) = n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$



Astuce de Zyro

Pour x^n , l'exposant « descend » devant et diminue de 1 : x^5 devient $5x^4$. C'est comme une petite fusée qui perd un étage à chaque décollage !

5. Somme, multiple et produit

P

Opérations

Si u et v sont dérivables et k est un réel :

$$(u + v)' = u' + v', \quad (ku)' = k u', \quad (uv)' = u'v + u v'.$$

Ces règles permettent de dériver tout polynôme : on dérive chaque terme, et un coefficient multiplicatif reste devant. Par exemple, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ a pour dérivée $f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$.

E

Exemple 4

Soit $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$. On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 - 3$, donc $u' = 2$ et $v' = 2x$.

$$f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6.$$

⚠

Piège

La dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées : $(uv)' \neq u'v'$. Il y a deux termes à additionner.

6. Dérivée d'un quotient

P

Quotient

Si v ne s'annule pas sur I :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

E

Exemple 5

Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ sur $]1; +\infty[$. Ici $u' = 3$ et $v' = 1$.

$$f'(x) = \frac{3(x-1) - (3x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{3x-3-3x-2}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}.$$

Le cas particulier $\left(\frac{1}{v}\right)'$ explique que la dérivée de $\frac{1}{x}$ soit $-\frac{1}{x^2}$. Pour un quotient, écris toujours d'abord u, v, u' et v' avant d'appliquer la formule, et vérifie que v ne s'annule pas sur l'intervalle étudié.

⚠

Piège

Au numérateur du quotient, l'ordre compte : c'est $u'v - uv'$, et non $uv' - u'v$. Une inversion change le signe du résultat !

7. Dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$

P Fonction composée avec une fonction affine

Si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) = a f'(ax + b)$ pour les x où $ax + b$ est dans l'ensemble de dérivabilité de f .

E Exemple 6

$g(x) = (3x - 5)^4$: ici $f(X) = X^4$, $a = 3$, donc
 $g'(x) = 3 \times 4 (3x - 5)^3 = 12(3x - 5)^3$.

$$h(x) = \sqrt{2x+1} \text{ sur } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[: h'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

8. Dérivée et variations

P Signe de la dérivée

Sur un intervalle I : si $f'(x) \geq 0$ partout sur I , alors f est **croissante** ; si $f'(x) \leq 0$, f est **décroissante**. Quand f' s'annule en changeant de signe, la courbe a une tangente horizontale et f admet un **extremum local**.

Cette propriété est la clé des problèmes d'optimisation : pour trouver le plus grand bénéfice, la plus petite dépense ou l'aire maximale, on cherche les points où la dérivée s'annule en changeant de signe. Mais $f'(x) = 0$ ne suffit pas à elle seule : pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ et pourtant la fonction reste croissante, sans extremum.

M

Méthode

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.
2. Étudie son signe (tableau de signes).
3. Déduis les variations de f et calcule les valeurs aux extrema.

E

Exemple 7

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, positive pour $x < -1$ et pour $x > 1$, négative entre -1 et 1 . Comme $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0 puis -	0 puis +	
variations de f	croissante	maximum 2	minimum -2	croissante

À retenir

- Taux de variation : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, pente de la sécante.
- Le nombre dérivé $f'(a)$ est la limite du taux $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ quand $h \rightarrow 0$, et la pente de la tangente.
- Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Usuelles : $(x^n)' = n x^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $(u + v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- $(f(ax + b))' = a f'(ax + b)$.
- $f' \geq 0$: f croissante ; $f' \leq 0$: f décroissante.

Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**



Exercices de maths

Dérivation : exercices de maths 1ère



Contrôles de maths

Dérivation : contrôle de maths 1ère



QCM de maths

Dérivation : QCM de maths 1ère



Exercices de maths

Variations et extremums : exercices de maths 1ère



Exercices de maths

Suites numériques : exercices de maths 1ère



Contrôles de maths

Variations et extremums : contrôle de maths 1ère

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage