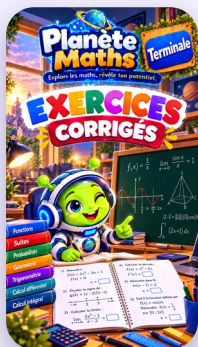


Dérivation et convexité : exercices corrigés de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 148 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Dérivées usuelles



$$f'(x) = 15x^2 - 2. \quad g'(x) = 8x + \frac{1}{x^2}. \quad h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}. \quad k'(x) = -2 \sin x - 3 \cos x.$$

2 Première composée



$$f'(x) = 5 \times 2 (2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4. \quad g'(x) = 3e^{3x}. \quad h'(x) = 4 \cos(4x).$$

Pour k : $k'(x) = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$ (on retrouve la dérivée de $\ln x$, car $\ln(5x) = \ln 5 + \ln x$).

3 Lire un signe



Le produit $(x + 3)(x - 2)$ est un trinôme de coefficient dominant positif, de racines -3 et 2 . Il est positif pour $x \leq -3$, négatif pour $-3 \leq x \leq 2$ et positif pour $x \geq 2$.

Donc f est croissante sur $] -\infty ; -3]$, décroissante sur $[-3 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$.

4 Vrai ou faux ?



a. Faux : $(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$, il manque le facteur $u' = 2x$.

b. Vrai : $f''(x) = 2 > 0$.

c. Faux : $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, le logarithme est concave.

d. Faux : pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f'' = 12x^2$ ne change pas de signe.

5 Dérivée seconde d'un polynôme



$f'(x) = 3x^2 - 12x + 2$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

$f'' < 0$ pour $x < 2$: f est concave sur $] -\infty ; 2]$. $f'' > 0$ pour $x > 2$: f est convexe sur $[2 ; +\infty[$. f'' change de signe en 2 , et $f(2) = 8 - 24 + 4 = -12$: le point d'inflexion est $(2 ; -12)$.

6 Équation d'une tangente



$f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$, $f'(x) = 2x - 3$ donc $f'(2) = 1$. La tangente est $y = 1 \times (x - 2) - 1 = x - 3$.

$f(x) - (x - 3) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$: la courbe est au-dessus de sa tangente (ce qui est normal : $f'' = 2 > 0$, f est convexe).

7 Une cuvette et son minimum



$f'(x) = e^x - 1$. Comme $e^x < 1$ pour $x < 0$ et $e^x > 1$ pour $x > 0$, f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$; son minimum est $f(0) = 1$.

$f''(x) = e^x > 0$: f est convexe sur $\mathbb{R}$.

8 Produit et composée



$$f'(x) = 1 \times e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x}.$$

Comme $e^{-2x} > 0$, f' est du signe de $1 - 2x$: positive avant $\frac{1}{2}$, négative après. f croît sur $] -\infty ; \frac{1}{2}]$, décroît ensuite, et son maximum est $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0,18$.

9 Un logarithme composé



$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, du signe de x : f décroît sur $] -\infty ; 0]$, croît sur $[0 ; +\infty[$, minimum $f(0) = 0$.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

f'' est positive sur $[-1 ; 1]$ (f convexe) et négative en dehors (f concave). Elle change de signe en -1 et en 1 : points d'inflexion $(-1 ; \ln 2)$ et $(1 ; \ln 2)$.

10 Puissance d'un trinôme



Le discriminant de $x^2 - 4x + 5$ vaut $16 - 20 = -4 < 0$ et le coefficient dominant est positif : le trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3(2x - 4)(x^2 - 4x + 5)^2 = 6(x - 2)(x^2 - 4x + 5)^2$. Le carré est strictement positif, donc f' est du signe de $x - 2$: f décroît sur $] -\infty ; 2]$ puis croît. Le minimum est $f(2) = (4 - 8 + 5)^3 = 1$.

11 Racine carrée composée



$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$. En $a = 7$: $f(7) = \sqrt{25} = 5$ et $f'(7) = \frac{3}{10} = 0,3$. La tangente est $y = 0,3(x - 7) + 5 = 0,3x + 2,9$.

$f'(x) = \frac{3}{2}(3x+4)^{-1/2}$ donc

$$f''(x) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3(3x+4)^{-3/2} = -\frac{9}{4(3x+4)\sqrt{3x+4}} < 0 : f \text{ est concave, sa}$$

courbe est au-dessous de ses tangentes. Ainsi $\sqrt{3x+4} \leq 0,3x + 2,9$; par exemple en $x = 0 : 2 \leq 2,9$.

12 Deux points d'inflexion



$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \text{ et } f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

f'' est positive sur $] -\infty ; 0]$, négative sur $[0 ; 2]$, positive sur $[2 ; +\infty[$. f est donc convexe sur $] -\infty ; 0]$, concave sur $[0 ; 2]$, convexe sur $[2 ; +\infty[$.

Il y a deux points d'inflexion : $(0 ; 0)$ et $(2 ; -16)$, car $f(2) = 16 - 32 = -16$.

13 Lire la courbe d'une dérivée



- f' est positive sur $] -\infty ; 1]$, négative sur $[1 ; 3]$, positive sur $[3 ; +\infty[$. Donc f croît, puis décroît, puis croît.
- La courbe de f' descend jusqu'à son minimum en $x = 2$, puis remonte : f' est décroissante sur $] -\infty ; 2]$ (donc f concave) et croissante sur $[2 ; +\infty[$ (donc f convexe). On le confirme par $f''(x) = 2x - 4$.
- Oui : f'' s'annule en changeant de signe en $x = 2$, il y a un point d'inflexion d'abscisse 2.

14 L'enclos contre le mur



Le côté parallèle au mur mesure $60 - 2x$. L'aire est $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$.

$A'(x) = 60 - 4x$, positive pour $x < 15$ et négative pour $x > 15$: A croît puis décroît, avec un maximum en $x = 15$ valant $A(15) = 15 \times 30 = 450$.

L'aire maximale est de **450** m², pour des côtés de **15** m et **30** m.

15 Un encadrement du logarithme



a. $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: f est concave.

b. $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$: tangente $y = x - 1$. Une fonction concave a sa courbe au-dessous de ses tangentes, donc $\ln x \leq x - 1$.

c. On applique (b) au réel $\frac{1}{x} > 0$: $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, donc $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

d. Avec $x = 1,2$: $1 - \frac{1}{1,2} = \frac{1}{6} \leq \ln 1,2 \leq 0,2$, soit $0,166 < \ln 1,2 < 0,2$ environ.

16 La boîte dans une feuille carrée



a. La base est un carré de côté $36 - 2x$ et la hauteur est x : $V(x) = x(36 - 2x)^2$.

b. $V'(x) = (36 - 2x)^2 + x \times 2 \times (-2)(36 - 2x) = (36 - 2x)[(36 - 2x) - 4x] = (36 - 2x)(36 - 6x)$.

c. Sur $]0 ; 18[$, $36 - 2x > 0$ donc V' est du signe de $36 - 6x$: positive pour $x < 6$, négative pour $x > 6$. V est croissante puis décroissante, maximale en $x = 6$, avec $V(6) = 6 \times 24^2 = 3456$.

Le volume maximal est de **3456** cm³, pour des carrés de **6** cm.

17 Sinus de 2x

★★★★

$f'(x) = 2 \cos(2x)$. Sur $[0; \pi]$, $2x \in [0; 2\pi]$ et $\cos(2x) = 0$ pour $2x = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

f' est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, négative sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, positive sur $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$. f passe de 0 à son maximum $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, descend à son minimum $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$, puis remonte à 0.

$f''(x) = -4 \sin(2x)$, négative sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (concave) et positive sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (convexe). Le point $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un point d'inflexion.

18 Exponentielle et deux inflexions

★★★★

- a. $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$. Elle est du signe de $x^2 - 2$, nul en $\pm\sqrt{2}$, positif à l'extérieur : f croît sur $] -\infty; -\sqrt{2}]$, décroît sur $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, croît sur $[\sqrt{2}; +\infty[$. Maximum local $f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$, minimum local $f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$.
- b. $f''(x) = 2xe^x + (x^2 - 2)e^x = (x^2 + 2x - 2)e^x$.
- c. $x^2 + 2x - 2$ a pour discriminant $4 + 8 = 12$ et pour racines $-1 - \sqrt{3}$ et $-1 + \sqrt{3}$. Il est positif à l'extérieur des racines : f est convexe sur $] -\infty; -1 - \sqrt{3}]$ et sur $[-1 + \sqrt{3}; +\infty[$, concave entre les deux. Les points d'inflexion ont pour abscisses $-1 - \sqrt{3}$ et $-1 + \sqrt{3}$.

19 Coût moyen minimal



$f'(x) = 0,5 - \frac{8}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{2x^2}$, du signe de $x^2 - 16$ sur $[1; 20]$: négative pour $x < 4$, positive pour $x > 4$.

f décroît sur $[1; 4]$ puis croît sur $[4; 20]$. Le minimum est $f(4) = 2 + 2 + 3 = 7$.

Il faut produire 400 pièces par jour, pour un coût moyen de 7 € par pièce. De plus

$f''(x) = \frac{16}{x^3} > 0$: f est convexe, ce qui confirme que le point critique est un minimum.

20 Quand la tangente traverse la courbe



a. $f'(x) = 3(x - 1)^2$ et $f''(x) = 6(x - 1)$. $f'(1) = 0$.

b. $f(1) = 2$: la tangente est $y = 2$. $f(x) - 2 = (x - 1)^3$ est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$: la courbe passe sous la tangente puis au-dessus. Elle la traverse : c'est un point d'inflexion (f'' change de signe en 1).

c. Non : $f'(x) = 3(x - 1)^2 \geq 0$ ne change pas de signe, f est croissante sur $\mathbb{R}$. Une dérivée nulle ne suffit pas pour avoir un extremum.

Le livre d'exercices corrigés de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 148 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de
Terminale

Changer de niveau

Niveau : Terminale

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Dérivation et convexité : exercices de maths Terminale



QCM de maths

Dérivation et convexité : QCM de maths Terminale



Contrôles de maths

Dérivation et convexité : contrôle de maths Terminale



Exercices de maths

Fonction exponentielle : exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

Fonction logarithme népérien : exercices
de maths Terminale

 QCM de maths

Fonction exponentielle : QCM de maths
Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage