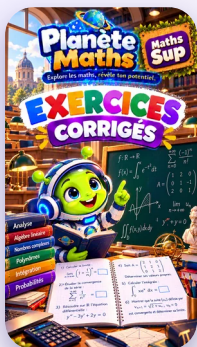


Dérivation et développements limités : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Taux d'accroissement



$f(2) = 10$ et $f(2 + h) = 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h = 10 + 7h + h^2$. Donc

$$\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 7 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 7.$$

Réponse : $f'(2) = 7$.

2 Dérivées usuelles



On dérive terme à terme : $(5x^4)' = 20x^3$, $(3\sqrt{x})' = \frac{3}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$.

Réponse : $f'(x) = 20x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$.

3 Tangente à une courbe



$f(1) = 0$; $f'(x) = \ln x + 1$ donc $f'(1) = 1$. La tangente est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$.

Réponse : $y = x - 1$.

4 Dérivées composées



a) $g'(x) = 5 \times 2(2x + 1)^4 = 10(2x + 1)^4$.

b) $h'(x) = (6x - 1)e^{3x^2 - x}$.

5 Dérivabilité en 0



a) Le taux $\frac{|h|}{h}$ vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$: pas de limite, donc non dérivable en 0.

b) Le taux est $\frac{h|h|}{h} = |h| \rightarrow 0$: f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

6 Approximer une exponentielle



$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} = 1,105166 \dots$$

Réponse : $e^{0,1} \approx 1,10517$ (valeur exacte $1,1051709 \dots$, erreur inférieure à 5×10^{-6}).

7 Rolle sur un polynôme



f est polynomiale, donc continue et dérivable. $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 1 = 1$ et $f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 1 = 1$: les valeurs aux bornes sont égales.

Rolle s'applique : $f'(c) = 3c^2 - 3 = 0 \iff c = \pm 1$, et $\pm 1 \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

Réponse : $c = -1$ ou $c = 1$.

8 Accroissements finis explicites



$$\frac{f(9) - f(1)}{9 - 1} = \frac{3 - 1}{8} = \frac{1}{4}. \text{ On résout } f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} \iff \sqrt{c} = 2 \iff c = 4.$$

Réponse : $c = 4 \in]1, 9[$.

9 Encadrer un logarithme



a) $\ln$ est continue sur $[1, 1+x]$, dérivable sur $]1, 1+x[$. Il existe $c \in]1, 1+x[$ avec

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{1}{c} x. \text{ Comme } \frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < 1, \text{ on obtient } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$$

b) Pour $x = 0,5$: $\frac{1}{3} < \ln 1,5 < \frac{1}{2}$ (en effet $\ln 1,5 = 0,405\dots$).

10 Convexité d'un polynôme



$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 1 \text{ et } f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

$f'' \geq 0$ sur $] -\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$: f y est convexe. $f'' \leq 0$ sur $[-1, 1]$: f y est concave.

f'' change de signe en -1 et en 1 : ce sont les abscisses des points d'inflexion.

11 Inégalité de convexité



a) $\exp'' = \exp > 0$: $\exp$ est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0 , d'équation $y = 1 + x$.

b) $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: $\ln$ est concave, donc sous sa tangente en 1 , $y = x - 1$:

$$\ln u \leq u - 1, \text{ soit } \ln(1+t) \leq t.$$

Avec $t = \frac{1}{n}$: $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$. En passant à l'exponentielle (croissante) :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

12 Produit de DL



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ et } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

$$\text{Produit : } 1 + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

La tangente en 0 est $y = 1 + x$ et $f(x) - (1 + x) \sim -\frac{x^3}{3}$: la courbe est au-dessus de la tangente pour $x < 0$ et en dessous pour $x > 0$ (point d'inflexion en 0).

13 Limite par DL



$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ donc } \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ et le quotient vaut } -\frac{1}{6} + o(1).$$

Réponse : la limite est $-\frac{1}{6}$.

14 Inverse d'un trinôme



Posons $u = x + x^2$. Alors $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ avec $u^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$.

$$\text{D'où } 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 - x^3 + o(x^3) = 1 - x + x^3 + o(x^3).$$

$$\text{Contrôle : } \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)(1+x^3+\dots), \text{ même résultat.}$$

15 DL de la tangente

★★★★

$\cos x = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Alors

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - u + u^2 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

Multiplions par $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$: coefficient de x^3 : $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; de x^5 :

$$\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{25 - 10 + 1}{120} = \frac{2}{15}.$$

Réponse : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

16 Limite d'une puissance

★★★★

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \text{ et } \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Donc $(1+x)^{1/x} = e \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)$. Alors

$$e - (1+x)^{1/x} = \frac{ex}{2} + o(x).$$

Réponse : la limite est $\frac{e}{2}$.

17 Courbe et tangente

★★★★

$\cos x = 1 + u$, $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Alors

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Réponse : $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.

La tangente en 0 est $y = 0$ et $f(x) \sim -\frac{x^2}{2} < 0$: la courbe est localement sous sa tangente.

18 Nombre de racines

★★★★

$P(1) = -2 < 0$ et $P(2) = 7 > 0$: par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a une racine dans $]1, 2[$.

Supposons deux racines $\setminus(r_{10})$: contradiction. La racine est unique.

Pour $x^3 + px + q$ avec $p > 0$: la dérivée $3x^2 + p$ est strictement positive, donc au plus une racine ; les limites $\pm\infty$ et le TVI en assurent l'existence : exactement une racine réelle.

19 Dérivée n-ième

★★★★

Avec $u = x^2$ (dérivées $2x, 2, 0$) et $v = e^x$: $f^{(n)} = x^2 e^x + n \cdot 2x e^x + \binom{n}{2} \cdot 2 e^x$.

Réponse : $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

Pour $n = 3$: $(x^2 + 6x + 6)e^x$. Contrôle direct : $f' = (x^2 + 2x)e^x$, $f'' = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $f^{(3)} = (x^2 + 6x + 6)e^x$.

20 Asymptote par DL

★★★★

Pour $x > 0$: $g(x) = x\sqrt{1+u}$ avec $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. Alors

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\text{Donc } g(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Réponse : asymptote $y = x + \frac{1}{2}$; comme $g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{3}{8x} > 0$, la courbe est au-dessus de l'asymptote.

21 Deux limites en une



- a) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc le numérateur vaut $\frac{x^4}{24} + o(x^4)$: limite $\frac{1}{24}$.
- b) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, le numérateur vaut $\frac{x^3}{3} + o(x^3)$: limite $\frac{1}{3}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Dérivation et développements limités :
exercices de maths Maths Sup

QCM de maths

Dérivation et développements limités :
QCM de maths Maths Sup



Contrôles de maths

Dérivation et développements limités :
contrôle de maths Maths Sup



Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de
maths Maths Sup



Exercices de maths

Arithmétique et polynômes : exercices de
maths Maths Sup



QCM de maths

Intégration et primitives : QCM de maths
Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage