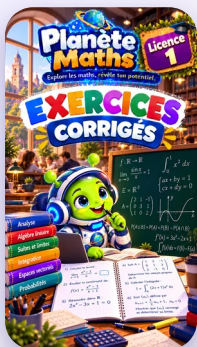


Dérivation et formules de Taylor : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Nombre dérivé par la définition



$f(2) = 4 + 6 = 10$. Pour $h \neq 0$: $f(2 + h) = 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h = 10 + 7h + h^2$,
donc $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 7 + h$.

Quand $h \rightarrow 0$, le taux tend vers 7 : $f'(2) = 7$.

Tangente : $y = 10 + 7(x - 2) = 7x - 4$.

2 Vrai ou faux ?



- a) Vrai : $f(a+h) - f(a) = h \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow 0 \times f'(a) = 0$.
- b) Faux : $|x|$ est continue en 0 sans y être dérivable.
- c) Faux : le taux $\frac{|h|}{h}$ vaut -1 pour $h < 0$ et 1 pour $h > 0$, il n'a pas de limite en 0.

3 Calculs de dérivées



- a) $f'(x) = 6xe^{2x} + 2(3x^2 - 1)e^{2x} = (6x^2 + 6x - 2)e^{2x}$.
- b) $g'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x(x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
- c) $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Rolle sur un trinôme



f est polynomiale, donc continue et dérivable. $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ et $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$: les hypothèses sont satisfaites.

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \iff x = 2, \text{ et } 2 \in]1, 3[. \text{ Donc } c = 2.$$

5 Accroissements finis pour le carré



$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16 - 1}{3} = 5$. On résout $f'(c) = 2c = 5$, soit $c = \frac{5}{2} = 2,5$, qui appartient bien à $]1, 4[$.

6 Convexité d'un polynôme



$$f'(x) = 3x^2 - 12x \text{ et } f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2).$$

$f'' < 0$ sur $] -\infty, 2[$: f est concave ; $f'' > 0$ sur $]2, +\infty[$: f est convexe. Comme f'' change de signe en 2, il y a un point d'inflexion d'abscisse 2, d'ordonnée

$$f(2) = 8 - 24 + 1 = -15.$$

7 Un développement limité simple



$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3) \text{ (le terme d'ordre 4 est négligeable).}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\text{Somme : } f(x) = 2 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

8 Dérivable avec une dérivée discontinue



1) Le taux en 0 vaut $\frac{f(h)}{h} = h \cos \frac{1}{h}$, de valeur absolue $\leq |h|$, donc tend vers 0 : $f'(0) = 0$.

2) Pour $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$. Le premier terme tend vers 0, mais $\sin \frac{1}{x}$ oscille entre -1 et 1 (par exemple, il vaut 1 pour

$x = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$ et -1 pour $x = \frac{1}{3\pi/2 + 2k\pi}$, suites tendant vers 0). Donc f' n'a pas de limite en 0 : f est dérivable en 0 sans que f' soit continue.

9 Un polynôme avec au plus une racine



Posons $P(x) = x^3 - 3x + m$. Supposons deux racines $\alpha < \beta$ dans $[-1, 1]$. Alors $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ et, d'après Rolle, il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset]-1, 1[$ tel que $P'(c) = 0$.

Or $P'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) < 0$ pour $x \in]-1, 1[$: contradiction. Il y a donc au plus une racine dans $[-1, 1]$.

10 Une inégalité sur l'arctangente



1) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \in]0, 1]$. Par l'inégalité des accroissements finis avec $M = 1$, $|\arctan b - \arctan a| \leq b - a$.

2) Sur $[3; 3,2]$, $\arctan'(x) \leq \frac{1}{1+9} = 0,1$. Avec $M = 0,1$:

$0 \leq \arctan(3,2) - \arctan 3 \leq 0,1 \times 0,2 = 0,02$ (la positivité vient de la croissance de $\arctan$).

11 Convexité de $x \ln x$



1) $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: f est convexe.

2) Avec $\lambda = \frac{1}{2}$ dans la définition : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$. Pour $a = 1, b = 3$:

$2 \ln 2 \leq \frac{3 \ln 3}{2}$, soit $4 \ln 2 \leq 3 \ln 3$, c'est-à-dire $16 \leq 27$ après passage à l'exponentielle.

12 Développement limité d'un logarithme



On remplace x par $2x$ dans $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$:

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + o(x^4).$$

$$\text{Donc } \ln(1+2x) - 2x = -2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + o(x^4).$$

13 Une limite par développement limité



À l'ordre 2 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Numérateur : $1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$.

Donc le quotient vaut $1 + o(1)$ et la limite est 1.

14 Deux limites avec L'Hôpital



a) Forme $\frac{0}{0}$. On dérive : $\frac{3e^{3x} - 3}{2x}$, encore $\frac{0}{0}$. On dérive : $\frac{9e^{3x}}{2} \rightarrow \frac{9}{2}$. La limite vaut $\frac{9}{2}$.

b) Forme $\frac{\infty}{\infty}$. Le quotient des dérivées est $\frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$. La limite vaut 0.

15 Taylor-Young de la racine



1) $f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$,
 $f''(0) = -\frac{1}{4}$; $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$, $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$.

Coefficients : $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4 \times 2} = -\frac{1}{8}$, $\frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}$. Donc

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.

2) Pour $x = 0,02$: $1 + 0,01 - 0,00005 + 0,0000005 = 1,0099505$. Donc

$\sqrt{1,02} \approx 1,00995$.

16 Un reste intégral pour le cosinus

★★★

1) Pour $f = \cos$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$. La formule d'ordre 3 donne $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \cos t \, dt$ (car $f^{(4)} = \cos$). Comme $|\cos t| \leq 1$, le reste est majoré par $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} dt \right| = \frac{|x|^4}{24}$.

2) Pour $x = 0,4$: $1 - 0,08 = 0,92$ et $\frac{0,4^4}{24} = \frac{0,0256}{24} \approx 0,001067$. Donc $0,9189 \leq \cos 0,4 \leq 0,9211$.

17 Étude locale d'une fonction prolongée

★★★

1) $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. On divise par x :
 $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.

2) On prolonge par $f(0) = 1$ (continuité). Le développement montre $f'(0) = \frac{1}{2}$; la tangente en 0 est $y = 1 + \frac{x}{2}$.

Au voisinage de 0, $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sim \frac{x^2}{6} > 0$: la courbe est au-dessus de sa tangente.

18 Un développement limité composé

★★★

$u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Alors $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $u^3 = x^3 + o(x^4)$, $u^4 = x^4 + o(x^4)$.

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

19 Une limite difficile



On écrit $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ et $x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

Le dénominateur vaut $x^4 + o(x^4)$.

Le quotient tend vers $\frac{1}{3}$.

20 Encadrer le nombre e



Avec $x = \frac{1}{n}$: $\frac{1/n}{1 + 1/n} = \frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$.

En multipliant par n la partie droite : $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 1$, soit $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e$. En

multipliant par $n+1$ la partie gauche : $1 \leq (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, soit $e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$.

Pour $n = 10$: $1,1^{10} \approx 2,5937 \leq e \leq 1,1^{11} \approx 2,8531$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Dérivation et formules de Taylor :
exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Dérivation et formules de Taylor : QCM
de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Dérivation et formules de Taylor :
contrôle de maths Licence L1

 Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Équations différentielles linéaires :
exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Intégration et primitives : QCM de maths
Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage