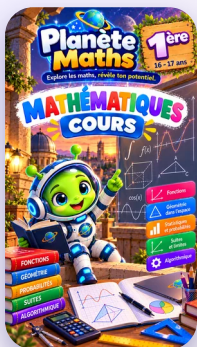


Combinatoire et dénombrement : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Combien de codes différents un cadenas à quatre chiffres peut-il afficher ? De combien de façons choisir une équipe de cinq joueurs parmi douze ? Énumérer à la main devient vite impossible : il faut une **méthode**. Dans ce chapitre, tu vas apprendre à dénombrer proprement, avec des outils qui serviront ensuite pour les probabilités et pour le calcul algébrique.

1. Le principe multiplicatif

P

Principe multiplicatif

Si une situation se décompose en p choix successifs, offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ possibilités, et si le **nombre** de possibilités à chaque étape ne dépend pas des choix précédents, alors le nombre total de résultats est

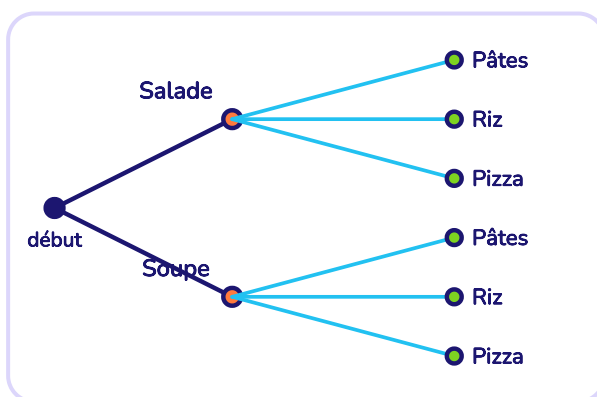
$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p.$$

P

Principe additif

Si un ensemble est réunion de deux ensembles **disjoints** A et B , alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

Un **arbre de choix** aide à visualiser le principe : chaque chemin de la racine à une feuille correspond à un résultat.



E

Exemple

Un restaurant propose 2 entrées, 3 plats et 2 desserts. Un menu comporte une entrée, un plat et un dessert. Le nombre de menus est $2 \times 3 \times 2 = 12$. L'arbre ci-dessus montre déjà $2 \times 3 = 6$ chemins pour les deux premiers choix ; chacun se prolonge de 2 façons avec le dessert.

2. Les p-listes

D

p-liste

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier naturel non nul. Une **p-liste** (ou **p-uplet**) de E est une suite ordonnée $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de E , les répétitions étant autorisées.

P

Nombre de p-listes

Il y a exactement n^p listes de p éléments d'un ensemble à n éléments.

En effet, chacun des p emplacements peut recevoir n'importe lequel des n éléments : on applique le principe multiplicatif avec $n \times n \times \dots \times n$ (p facteurs).

E

Exemple

Un cadenas à 4 molettes numérotées de 0 à 9 affiche un code qui est une 4-liste de $\{0, 1, \dots, 9\}$: il y a $10^4 = 10\,000$ codes. Un mot binaire de longueur 8 (un octet) est une 8-liste de $\{0, 1\}$: il y en a $2^8 = 256$.

3. Arrangements et permutations

D Factorielle

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, et par convention $0! = 1$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320

D Arrangement et permutation

Un **arrangement** de p éléments d'un ensemble E à n éléments est une p -liste d'éléments **deux à deux distincts**. Une **permutation** de E est un arrangement des n éléments : c'est un rangement de tous les éléments dans un certain ordre.

P Dénombrement

Pour $0 \leq p \leq n$, le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Le premier élément se choisit de n façons, le deuxième de $n-1$ (on ne peut pas reprendre le premier), et ainsi de suite.

E**Exemple**

Dix élèves participent à un concours de dessin et on remet une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ podiums possibles (arrangements de 3 élèves parmi 10). Et 5 amis peuvent s'asseoir sur un banc de $5! = 120$ manières.

4. Les parties d'un ensemble

Une **partie** (ou sous-ensemble) de E est un ensemble dont tous les éléments sont dans E . L'ensemble vide $\emptyset$ et E lui-même sont des parties de E .

P**Nombre de parties**

Un ensemble à n éléments possède exactement 2^n parties.

Pour fabriquer une partie, on décide pour chaque élément s'il y entre ou non : 2 choix par élément, soit une n -liste de $\{0, 1\}$, donc 2^n possibilités.

E**Exemple**

Pour $E = \{a, b, c\}$, les $2^3 = 8$ parties sont $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ et E .

5. Les combinaisons

D Combinaison

Une **combinaison** de k éléments d'un ensemble E à n éléments est une **partie** de E ayant k éléments : l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition. Leur nombre se note $\binom{n}{k}$ (« k parmi n »).

P Formule

Pour $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Justification : chaque combinaison de k éléments donne $k!$ arrangements, selon l'ordre choisi. Le nombre d'arrangements est donc $k!$ fois le nombre de combinaisons, d'où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$.

Situation	L'ordre compte ?	Répétitions ?	Nombre
p-liste d'un ensemble à n éléments	oui	oui	n^p
arrangement de p éléments parmi n	oui	non	$\frac{n!}{(n-p)!}$
permutation de n éléments	oui	non	$n!$
combinaison de p éléments parmi n	non	non	$\binom{n}{p}$

E Exemple

Un jury de 3 personnes est choisi parmi 9 volontaires, sans fonction particulière : l'ordre n'a pas d'importance. Il y a $\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ jurys possibles.

! Astuce de Zyro

Pour savoir si l'ordre compte, imagine que tu échanges deux éléments choisis. Si le résultat change (un podium, un code), c'est une liste ou un arrangement. Si le résultat reste le même (un jury, une main de cartes), c'est une combinaison.



Piège

Ne confonds pas $\binom{n}{k}$ avec $\frac{n!}{k!}$ ni avec n^k . Et n'oublie pas de diviser par $k!$ quand l'ordre ne compte pas.



Méthode : choisir le bon outil

1. Décris un résultat type et repère s'il s'agit d'une liste, d'un rangement ou d'une partie.
2. L'ordre compte-t-il ? Les répétitions sont-elles permises ?
3. Choisis la formule du tableau (ou décompose en étapes avec le principe multiplicatif).
4. Pour une condition « au moins un », passe par le contraire : total moins cas défavorables.

6. Les coefficients binomiaux



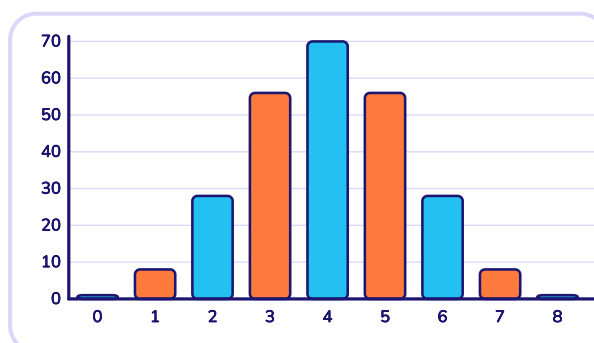
Propriétés

Pour tous entiers n et k avec $0 \leq k \leq n$:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$;
- symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- relation de Pascal (pour $0 \leq k \leq n-1$) : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
- somme : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Pascal : dans un ensemble à $n + 1$ éléments, fixons un élément a . Les parties de $k + 1$ éléments se partagent en celles qui contiennent a (il reste k éléments à choisir parmi n : $\binom{n}{k}$ parties) et celles qui ne le contiennent pas ($k + 1$ éléments parmi n : $\binom{n}{k+1}$ parties). Somme : on range les 2^n parties d'un ensemble à n éléments selon leur nombre d'éléments k , de 0 à n .

On range les coefficients $\binom{n}{k}$ en ligne n et colonne k . Grâce à la relation de Pascal, chaque nombre est la **somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui**, et les bords valent **1**.



8. La formule du binôme de Newton

P Formule du binôme

Pour tous réels (ou complexes) a et b et tout entier naturel n ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Pourquoi ? En développant le produit de n facteurs $(a + b)$, on choisit dans chaque facteur soit a , soit b . Le terme $a^{n-k}b^k$ apparaît chaque fois que l'on choisit b dans exactement k facteurs, et il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces k facteurs.

E Exemple

Pour $n = 5$, la ligne 5 du triangle de Pascal donne les coefficients **1, 5, 10, 10, 5, 1**, donc $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$.

Avec des coefficients :

$$(2x - 3)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-3) + 3(2x)(-3)^2 + (-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Deux cas particuliers à connaître : avec $a = b = 1$, on retrouve $2^n = \sum \binom{n}{k}$; avec $a = 1$ et $b = -1$, on obtient pour $n \geq 1$ la somme alternée $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

À retenir

- Principe multiplicatif : on multiplie le nombre de possibilités à chaque étape.
- Nombre de p -listes d'un ensemble à n éléments : n^p .
- Arrangements de p éléments parmi n : $\frac{n!}{(n-p)!}$; permutations : $n!$.
- Parties d'un ensemble à n éléments : 2^n ; parties à k éléments : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, somme des $\binom{n}{k}$ égale à 2^n .
- Binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Combinatoire et dénombrement :
exercices de maths Terminale

Combinatoire et dénombrement :
contrôle de maths Terminale

 **QCM de maths**

Combinatoire et dénombrement : QCM
de maths Terminale

 **Exercices de maths**

Probabilités conditionnelles et
indépendance : exercices de maths
Terminale

 **Exercices de maths**

Variables aléatoires et loi binomiale :
exercices de maths Terminale

 **Contrôles de maths**

Probabilités conditionnelles et
indépendance : contrôle de maths
Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage