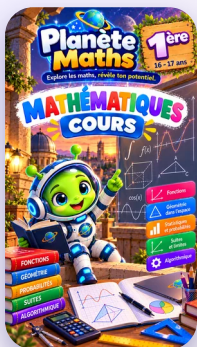


Continuité et théorème des valeurs intermédiaires : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

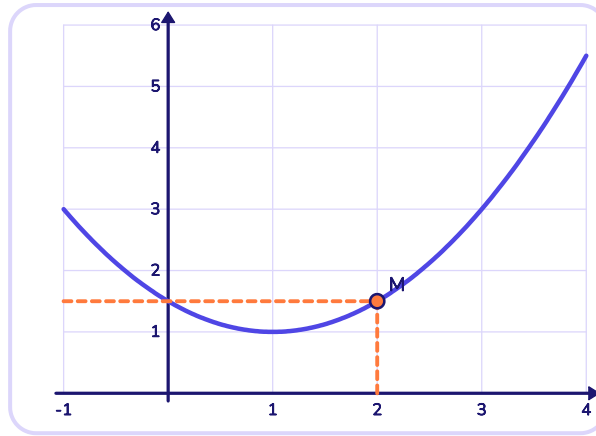
Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Quand tu traces la courbe d'une température au cours d'une journée, tu ne lèves jamais le crayon : la température ne saute pas d'un coup de 5°C à 15°C , elle passe par toutes les valeurs intermédiaires. Cette idée très simple, la **continuité**, a une conséquence puissante : elle garantit que certaines équations ont des solutions, même quand on ne sait pas les calculer. Dans ce chapitre, tu vas préciser l'idée, apprendre à la justifier, puis t'en servir pour **prouver l'existence** d'une solution et l'**encadrer** aussi finement que tu veux.

1. L'idée : une courbe tracée d'un seul trait

Une fonction est continue sur un intervalle quand sa courbe peut se dessiner **sans lever le crayon**. Les fonctions dont la courbe « casse » (un saut, un trou, une valeur interdite) ne sont pas continues à cet endroit.



Sur la figure ci-dessus, on peut approcher le point M de la courbe aussi près qu'on veut des deux côtés, et on arrive toujours exactement en M : c'est ce que traduit la définition qui suit.

2. Continuité en un point et sur un intervalle

D Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . On dit que f est **continue en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I .

Concrètement, trois choses doivent être vraies en même temps : $f(a)$ existe, la limite en a existe, et ces deux nombres sont égaux. Pour une fonction définie « par morceaux », on calcule séparément la **limite à gauche** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et la **limite à droite** $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: la fonction est continue en a exactement quand ces deux limites sont égales à $f(a)$.



Piège

La continuité se teste en un point **de l'ensemble de définition**. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas définie en **0** : on dit qu'elle est continue sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$, mais on ne parle pas de continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Les fonctions usuelles et les opérations

Heureusement, tu n'as pas à revérifier la définition à chaque fois : les fonctions de référence sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition, et les opérations conservent la continuité.

Fonction	Continue sur
polynômes, par exemple $x^3 - 5x + 1$	$\mathbb{R}$
fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$	chaque intervalle où $Q(x) \neq 0$
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$
$\ln x$	$]0 ; +\infty[$
$e^x, \cos x, \sin x, x $	$\mathbb{R}$

P**Opérations et dérivabilité**

- La somme, le produit, le quotient (dénominateur non nul) et la composée de fonctions continues sont continus.
- **Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.**

La réciproque est fausse : la fonction valeur absolue est continue en **0**, mais sa courbe a un « coin » et elle n'est pas dérivable en **0**. Retiens : **dérivable** $\Rightarrow$ **continue**, mais pas l'inverse.

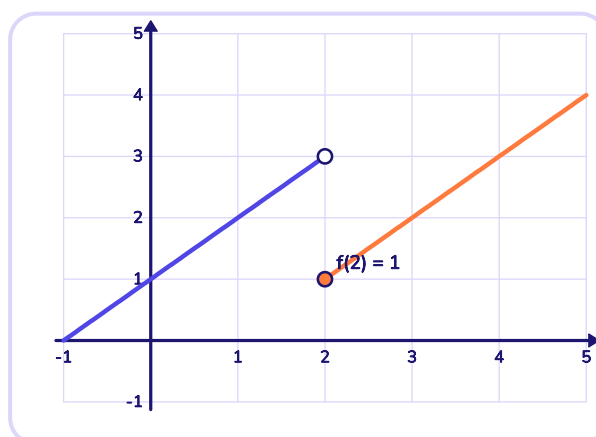
E**Exemple 1 : justifier une continuité**

Étudie la continuité de $h(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$ sur $]0; +\infty[$.

La fonction **ln** est continue sur $]0; +\infty[$. Le dénominateur $x^2 + 1$ est un polynôme continu qui ne s'annule jamais (il vaut au moins **1**). Un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continu : **h** est continue sur $]0; +\infty[$.

4. Quand une fonction n'est pas continue

Voici une fonction définie par morceaux : $f(x) = x + 1$ pour $x < 2$ et $f(x) = x - 1$ pour $x \geq 2$. À gauche de **2**, la courbe monte vers **3** (point vide) ; en **2**, la fonction vaut $f(2) = 1$. Les deux morceaux ne se rejoignent pas : la limite à gauche est **3**, $f(2) = 1$, il y a un **saut**.



M**Méthode : rendre une fonction continue grâce à un paramètre**

1. Calcule $f(a)$ au point de raccord.
2. Calcule la limite à gauche et la limite à droite en a .
3. Écris l'égalité de ces trois valeurs : tu obtiens une équation d'inconnue le paramètre.
4. Résous, puis vérifie.

E**Exemple 2 : trouver le paramètre**

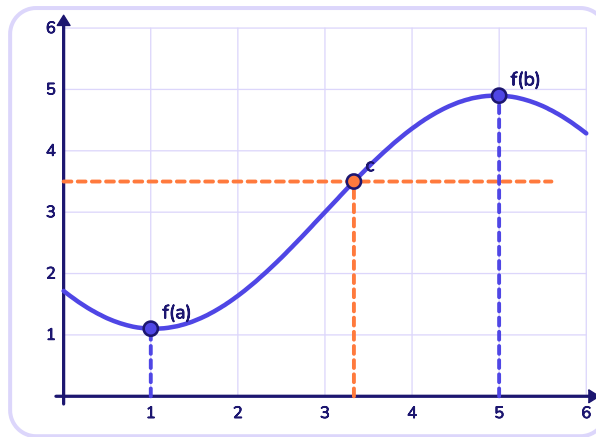
Soit $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 2$ et $f(x) = ax - 1$ si $x > 2$. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en 2 ?

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Limite à gauche : $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5$. Limite à droite : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax - 1) = 2a - 1$.

La continuité en 2 équivaut à $2a - 1 = 5$, donc $a = 3$.

5. Le théorème des valeurs intermédiaires**P****Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)**

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** c dans $[a; b]$.



La figure explique le théorème : pour aller de la hauteur $f(a)$ à la hauteur $f(b)$ sans lever le crayon, la courbe doit traverser toute droite horizontale $y = k$ située entre les deux. Le théorème dit qu'une solution existe, **pas qu'elle est unique**, et il ne la calcule pas.



Piège

Sans la continuité, le théorème devient faux. La fonction qui vaut -1 sur $[-1; 0[$ et 1 sur $[0; 1]$ passe de -1 à 1 , mais ne prend jamais la valeur 0 .

6. Le corollaire de la bijection



Corollaire (théorème de la bijection)

Si f est **continue et strictement monotone** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** dans $[a; b]$.

Pourquoi unique ? Parce qu'une fonction strictement monotone ne prend jamais deux fois la même valeur. Le théorème s'étend aux intervalles ouverts ou infinis : on remplace alors $f(a)$ et $f(b)$ par les **limites** de f aux bornes. Par exemple, si f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors tout réel k a un unique antécédent.



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit « TVI pour l'existence, monotonie pour l'unicité » : deux hypothèses, deux conclusions, et aucun des deux ne marche sans l'autre !

7. Résoudre $f(x) = k$ et encadrer la solution



Méthode : montrer qu'une équation a une unique solution

1. Précise l'intervalle et justifie que f est **continue** dessus.
2. Étudie le sens de variation (signe de f') pour justifier que f est **strictement monotone**.
3. Calcule $f(a)$ et $f(b)$ et vérifie que k est entre les deux.
4. Cite le corollaire et conclus à l'existence et à l'unicité.

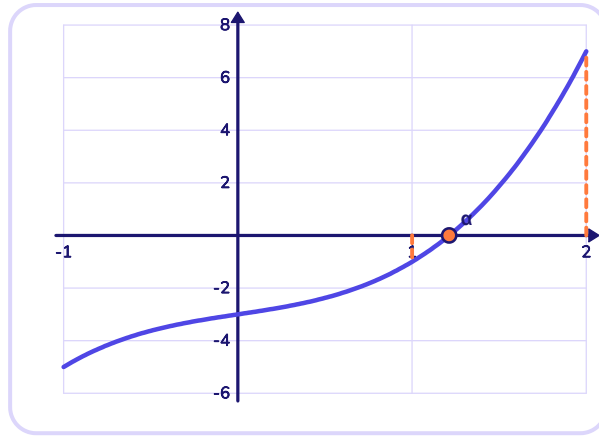


Exemple 3 : une équation sans formule

Montre que $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$, puis encadre-la à 0,01 près.

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$, polynôme donc continu sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante. Comme $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$, le corollaire donne une unique solution α dans $[1; 2]$.

Encadrement par balayage : $f(1,2) = -0,072 < 0$ et $f(1,3) = 0,497 > 0$, donc $\alpha \in [1,2; 1,3]$. Puis $f(1,21) \approx -0,0184 < 0$ et $f(1,22) \approx 0,0358 > 0$, donc $1,21 < \alpha < 1,22$.



Deux techniques d'encadrement : le **balayage** (on calcule f sur une grille de pas **0,1**, puis **0,01**, etc.) et la **dichotomie** : on coupe l'intervalle en deux, on garde la moitié où f change de signe, et on recommence. Après n étapes, l'amplitude est divisée par 2^n .

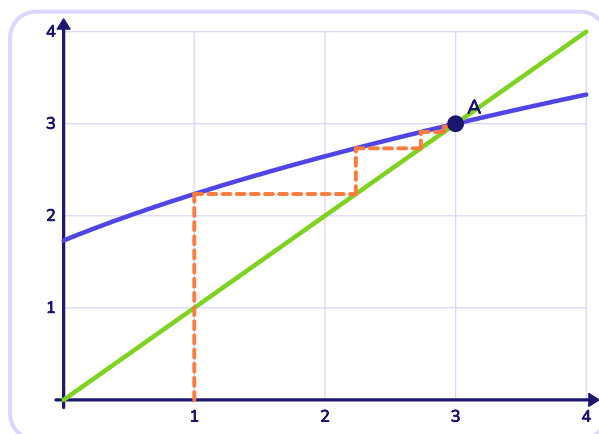
8. Suites et continuité

La continuité permet de trouver la limite d'une suite définie par récurrence.

P Limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f est continue en ℓ , alors ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

En effet, $u_{n+1} \rightarrow \ell$ d'un côté, et $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ de l'autre par continuité : par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Attention : cette égalité donne les limites **possibles**, il faut d'abord savoir que la suite converge (par exemple parce qu'elle est monotone et bornée).



E**Exemple 4 : limite d'une suite**

On admet que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ converge vers ℓ .
Détermine ℓ .

La fonction $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ est continue sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$ et tous les termes sont positifs, donc $\ell \geq 0$. On a $\ell = \sqrt{2\ell + 3}$, soit $\ell^2 = 2\ell + 3$, c'est-à-dire $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, qui se factorise en $(\ell - 3)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, on obtient $\ell = 3$.

À retenir

- f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; continue sur un intervalle si elle l'est en chaque point.
- Les fonctions usuelles sont continues sur leurs intervalles de définition ; somme, produit, quotient et composée conservent la continuité.
- **Dérivable $\Rightarrow$ continue** ; la réciproque est fausse (la valeur absolue en 0).
- **TVI** : f continue sur $[a; b]$, k entre $f(a)$ et $f(b)$ $\Rightarrow$ au moins une solution de $f(x) = k$.
- **Corollaire** : avec en plus une stricte monotonie, la solution est **unique**.
- Pour encadrer une solution : balayage ou dichotomie, en regardant le changement de signe.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ et f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires : exercices de maths Terminale

Contrôles de maths

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires : contrôle de maths Terminale

QCM de maths

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires : QCM de maths Terminale

Exercices de maths

Dérivation et convexité : exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

Fonction exponentielle : exercices de maths Terminale

 Contrôles de maths

Dérivation et convexité : contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage