

Arithmétique et nombres premiers : cours de maths 3ème à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 3ème

Tout le programme en un seul PDF de 109 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Pourquoi ne peut-on pas partager 13 billes en groupes égaux, alors que 12 se partagent de plein de façons ? Pourquoi les codes secrets de tes messages reposent-ils sur des nombres que personne ne sait décomposer facilement ? L'arithmétique est l'étude des nombres entiers et de leurs diviseurs. Dans ce chapitre, tu apprends à **reconnaître les nombres premiers**, à **décomposer** un entier, à calculer un **PGCD** et à t'en servir pour simplifier des fractions ou résoudre des problèmes de partage.

1. Multiples et diviseurs

D

Multiple, diviseur

Soient a et b deux entiers positifs, avec $b \neq 0$. Si $a = b \times k$ où k est un entier, on dit que a est un **multiple** de b , que b est un **diviseur** de a , ou encore que a est **divisible** par b .

Par exemple, $91 = 7 \times 13$: donc **91** est un multiple de **7** et de **13**, et **7** et **13** sont des diviseurs de **91**. Un entier a toujours pour diviseurs **1** et lui-même.

E

Exemple : tous les diviseurs de 36

On cherche les produits égaux à **36**, en prenant les entiers dans l'ordre : 1×36 , 2×18 , 3×12 , 4×9 , 6×6 . On s'arrête dès que les deux facteurs se rejoignent.

Les diviseurs de **36** sont donc **1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36**.

2. Les critères de divisibilité

Pour savoir si un grand nombre est divisible par un autre, pas besoin de poser la division : on regarde ses chiffres.

Divisible par	Critère	Exemple
2	le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8	2 574
3	la somme des chiffres est un multiple de 3	4 218 car $4 + 2 + 1 + 8 = 15$
4	les deux derniers chiffres forment un multiple de 4	1 836 car $36 = 4 \times 9$
5	le chiffre des unités est 0 ou 5	3 765
9	la somme des chiffres est un multiple de 9	5 238 car $5 + 2 + 3 + 8 = 18$
10	le chiffre des unités est 0	4 790



Piège

Un multiple de 9 est toujours un multiple de 3, mais pas l'inverse : 4 218 est divisible par 3 (somme 15) sans être divisible par 9.

3. Les nombres premiers

D Nombre premier

Un **nombre premier** est un entier supérieur ou égal à **2** qui n'a que deux diviseurs : **1** et lui-même. Un entier qui a d'autres diviseurs est dit **composé**.

Les entiers **0** et **1** ne sont pas premiers. Le nombre **2** est le **seul nombre premier pair**, car tout autre nombre pair est divisible par **2**. Le crible ci-dessous donne tous les nombres premiers jusqu'à **50**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

M Méthode : tester si un nombre est premier

1. Calcule la racine carrée du nombre pour savoir jusqu'où chercher.
2. Essaie de diviser par chaque nombre premier **2, 3, 5, 7, 11, ...** inférieur ou égal à cette racine.
3. Si aucune division ne tombe juste, le nombre est premier ; sinon il est composé.

E**Exemple : 97 est-il premier ?**

On a $\sqrt{97} \approx 9,8$: il suffit de tester **2, 3, 5** et **7**. Le nombre **97** est impair, la somme de ses chiffres est **16** (pas un multiple de 3), il ne finit ni par **0** ni par **5**, et $97 = 7 \times 13 + 6$.

Aucun de ces nombres ne divise **97** : donc **97** est premier.

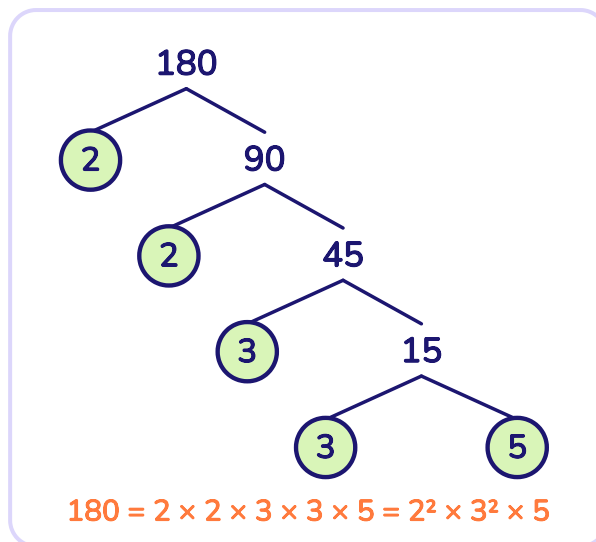
4. Décomposition en facteurs premiers

P**Propriété**

Tout entier supérieur ou égal à **2** s'écrit comme un produit de nombres premiers, et cette écriture est **unique** (à l'ordre des facteurs près).

M**Méthode**

1. Divise le nombre par le plus petit nombre premier qui le divise.
2. Recommence avec le quotient obtenu.
3. Arrête-toi quand le quotient vaut **1**, puis regroupe les facteurs égaux avec des exposants.



E Exemple : décomposer 504

$$504 = 2 \times 252 = 2 \times 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 2 \times 63 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 21 = 2^3 \times 3 \times 3 \times 7$$

Donc $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Vérification : $8 \times 9 \times 7 = 504$.

5. Le PGCD de deux nombres

D PGCD

Le **PGCD** de deux entiers a et b , noté $\text{PGCD}(a; b)$, est le **plus grand commun diviseur** de a et de b . Si $\text{PGCD}(a; b) = 1$, les nombres sont dits **premiers entre eux**.

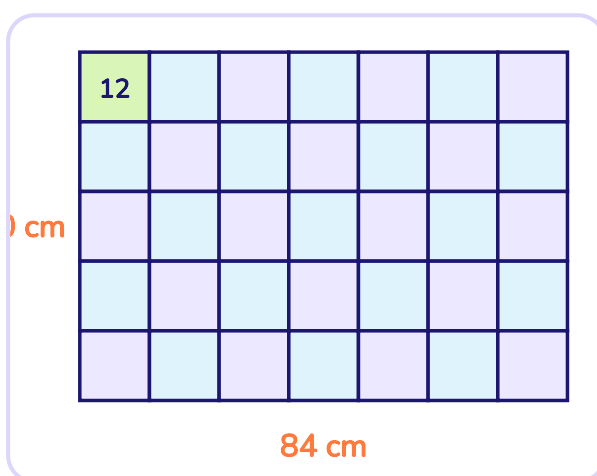
Avec la décomposition, on garde les facteurs premiers **communs**, chacun avec le **plus petit exposant**.

E Exemple : PGCD(84 ; 60)

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Les facteurs communs sont 2^2 et 3 .

$$\text{PGCD}(84 ; 60) = 2^2 \times 3 = 12.$$

Géométriquement, c'est le côté du plus grand carreau carré qui recouvre exactement un rectangle de **84** cm sur **60** cm : on pose **7** carreaux dans la longueur et **5** dans la largeur.



6. L'algorithme d'Euclide

P Propriété

Si $a > b$ et si r est le reste de la division euclidienne de a par b , alors
 $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$.

M**Méthode**

1. Divise le plus grand nombre par le plus petit et note le reste.
2. Divise l'ancien diviseur par ce reste, et continue.
3. Le PGCD est le **dernier reste non nul**.

E

Exemple : PGCD(252 ; 198)

Division euclidienne	Reste
$252 = 198 \times 1 + 54$	54
$198 = 54 \times 3 + 36$	36
$54 = 36 \times 1 + 18$	18
$36 = 18 \times 2 + 0$	0

Le dernier reste non nul est 18 : PGCD(252 ; 198) = 18.

!**Astuce de Zyro**

Sur ma planète, on décompose les petits nombres, mais pour les grands, comme **1 547** et **1 989**, on lance Euclide : quelques divisions suffisent, sans chercher aucun nombre premier !

7. Les fractions irréductibles

D Fraction irréductible

Une fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier, c'est-à-dire quand $\text{PGCD}(a; b) = 1$.

P Propriété

Pour rendre $\frac{a}{b}$ irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par $\text{PGCD}(a; b)$.

E Exemple

Avec $\text{PGCD}(252; 198) = 18$: $\frac{252}{198} = \frac{252 \div 18}{198 \div 18} = \frac{14}{11}$. Comme $14 = 2 \times 7$ et 11 est premier, $\text{PGCD}(14; 11) = 1$: la fraction est bien irréductible.

⚠ Piège

Une fraction simplifiée « à moitié » n'est pas la réponse : $\frac{252}{198} = \frac{126}{99}$ est vrai, mais 126 et 99 sont encore divisibles par 9 . Vérifie toujours que le PGCD final est 1 .

8. Les problèmes de partage

Les mots-clés t'aident à choisir l'outil : « le plus grand nombre de lots **identiques** sans reste » ou « le plus grand carreau » demandent un **PGCD** ; « à quel moment les deux événements se

produisent **en même temps** » demande un **multiple commun**.

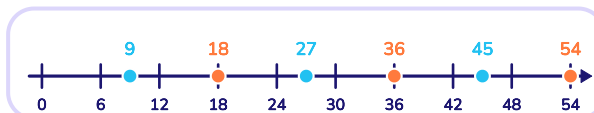
E Exemple : les bouquets

Une fleuriste a **84** roses et **60** tulipes. Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

Le nombre de bouquets divise **84** et **60** : c'est le plus grand diviseur commun, **PGCD(84 ; 60) = 12**. Elle fait **12** bouquets de **$84 \div 12 = 7$** roses et **$60 \div 12 = 5$** tulipes.

E Exemple : les rendez-vous

Deux feux clignent, l'un toutes les **6** secondes, l'autre toutes les **9** secondes, et partent ensemble. Les multiples de **6** sont **6, 12, 18, 24, ...** et ceux de **9** sont **9, 18, 27, ...** : ils clignent de nouveau ensemble au bout de **18** secondes, puis de **36** et de **54** secondes.



À retenir

- a est un **multiple** de b quand $a = b \times k$ avec k entier ; b est alors un **diviseur** de a .
- Les critères de divisibilité par **2, 3, 4, 5, 9, 10** se lisent sur les chiffres.
- Un **nombre premier** a exactement deux diviseurs : **1** et lui-même ; **2** est le seul premier pair, **1** n'est pas premier.
- Tout entier se décompose de façon **unique** en produit de facteurs premiers.
- Le **PGCD** se calcule avec la décomposition (plus petits exposants communs) ou avec l'**algorithme d'Euclide** (dernier reste non nul).
- On rend une fraction **irréductible** en divisant haut et bas par le PGCD.
- « Plus grand nombre de lots identiques » : PGCD ; « en même temps » : multiple commun.

Le livre de cours de maths 3ème

Tout le programme en un seul PDF de 109 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Arithmétique et nombres premiers :
exercices de maths 3ème

 Contrôles de maths

Arithmétique et nombres premiers :
contrôle de maths 3ème

 QCM de maths

Arithmétique et nombres premiers : QCM
de maths 3ème

 Exercices de maths

Racines carrées : exercices de maths
3ème

 Exercices de maths

Puissances et notation scientifique :
exercices de maths 3ème

 Contrôles de maths

Racines carrées : contrôle de maths
3ème

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage