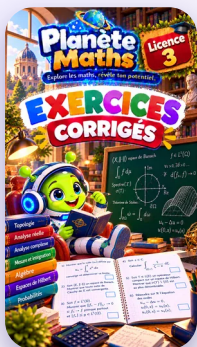


# Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

### 1 Dérivées partielles et gradient

★☆☆

Soit  $f(x, y) = x^3y - 2xy^2 + 5$ . Calcule  $\partial_x f$ ,  $\partial_y f$ , puis le gradient de  $f$  au point  $(2, -1)$ .

### 2 Une jacobienne $3 \times 2$

★☆☆

Soit  $f(x, y) = (x^2 + y, xy, x - y^3)$ , de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Écris sa matrice jacobienne, puis calcule-la en  $(1, 2)$ .

### 3 Approximation linéaire



Soit  $f(x, y) = x^2y$ ,  $a = (1, 3)$  et  $h = (0, 1; -0, 2)$ . Calcule  $Df(a)(h)$ , puis compare avec l'accroissement exact  $f(a + h) - f(a)$ .

### 4 Vrai ou faux ?



Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie.

- a. Une fonction de classe  $C^1$  est différentiable.
- b. Si les dérivées partielles de  $f$  existent en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .
- c. La différentielle  $Df(a)$  est une application linéaire.

### 5 Hessienne en un point



Soit  $f(x, y) = x^2y + y^3$ . Calcule sa Hessienne en  $(1, 1)$  puis son déterminant et sa trace.

### 6 Un point critique



Trouve le point critique de  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$  et détermine sa nature.

### 7 Température et direction



Dans une serre, la température (en °C) au point  $(x, y)$  du sol vaut  $T(x, y) = 20 - x^2 - 2y^2$ . Au point  $(1, 1)$ , un capteur se déplace dans la direction du vecteur unitaire  $u = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . Calcule la dérivée directionnelle  $D_u T(1, 1)$ .

### 8 Règle de la chaîne



Soit  $f(x, y) = (x^2 - y, xy)$  et  $g(u, v) = u^2 + 3uv$ . On pose  $h = g \circ f$ . Calcule  $\nabla h(1, 2)$  à l'aide des jacobiennes, sans développer  $h$ .

### 9 Jacobienne polaire



Soit  $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Calcule  $J_\Phi$ , son déterminant, puis sa valeur en  $(2, \pi/6)$ .

### 10 Taylor d'un logarithme



Écris le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en  $(0, 0)$  de  $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$ .

### 11 Estimer une valeur



Soit  $f(x, y) = \sin x e^y$ . Donne l'approximation de Taylor d'ordre 2 en  $(0, 0)$ , puis estime  $f(0,1; 0,2)$ .

### 12 Nature de deux points critiques



Étudie les points critiques de  $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$ .

### 13 Inversion locale en un point



Soit  $f(x, y) = (x^2 + y, x + y^2)$ . Montre que  $f$  est localement inversible au voisinage de  $(1, 1)$ , calcule  $f(1, 1)$  et la jacobienne de l'inverse local en ce point image. Pour quels points le théorème ne s'applique-t-il pas ?

#### 14 Une dérivée implicite

★★★

Montre que l'équation  $x^2y + y^3 = 2$  définit  $y$  comme fonction de  $x$  près de  $(1, 1)$ , calcule  $\varphi'(1)$  et estime  $\varphi(1,1)$ .

#### 15 Dérivées partielles sans différentiabilité

★★★★

Soit  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ . Montre que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ , qu'elle y admet des dérivées partielles, mais qu'elle n'y est pas différentiable.

#### 16 Distance minimale à un plan

★★★★

Trouve le point du plan  $x + 2y + 3z = 14$  le plus proche de l'origine, par la méthode de Lagrange appliquée à  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

#### 17 Boîte de surface fixée

★★★★

Une boîte parallélépipédique de dimensions  $x, y, z > 0$  a une surface totale de  $54 \text{ dm}^2$ . Détermine ses dimensions pour que son volume  $V = xyz$  soit maximal.

#### 18 Une dérivée seconde implicite

★★★★

Le folium  $x^3 + y^3 = 3xy$  passe par  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . Montre qu'il y est le graphe d'une fonction  $\varphi$ , calcule  $\varphi'(\frac{3}{2})$  puis  $\varphi''(\frac{3}{2})$ , et interprète.

#### 19 Plans tangents d'un hyperboloïde

★★★★

Soit  $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ . Montre que  $M$  est une surface (sous-variété de dimension 2) et donne son plan tangent en  $(1, 1, 1)$  puis en  $(1, 0, 0)$ .

## 20 Quand la Hessienne ne conclut pas



Les fonctions  $f(x, y) = x^2 + y^4$  et  $g(x, y) = x^2 - y^4$  ont toutes deux  $(0, 0)$  pour point critique. Calcule leur Hessienne en ce point, puis détermine par une étude directe la nature du point critique pour chacune.

## 21 Inverse local à l'ordre 2



Soit  $f(x, y) = (x + y^2, y + x^2)$ . Montre que  $f$  est un difféomorphisme local en  $(0, 0)$  et détermine le développement à l'ordre 2 de son inverse local  $g(u, v) = (x, y)$ .

## 22 Extrema globaux sur un disque



Détermine le maximum et le minimum de  $f(x, y) = x^2 y$  sur le disque fermé  $D = \{x^2 + y^2 \leq 3\}$ .

### Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

✓ Exercices corrigés de maths

Calcul différentiel dans  $\mathbb{R}^n$  : exercices corrigés de maths Licence L3

■ Cours de maths

Calcul différentiel dans  $\mathbb{R}^n$  : cours de maths Licence L3

🎯 QCM de maths

Calcul différentiel dans  $\mathbb{R}^n$  : QCM de maths Licence L3

✓ Exercices corrigés de maths

Équations différentielles : exercices corrigés de maths Licence L3

✓ Exercices corrigés de maths

Fonctions holomorphes : exercices corrigés de maths Licence L3

■ Cours de maths

Équations différentielles : cours de maths Licence L3

## Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage