

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une fonction de plusieurs variables se comporte, au voisinage d'un point, presque comme une application linéaire. Tout le calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ consiste à identifier cette application linéaire, à contrôler l'erreur commise, puis à en tirer des conséquences qualitatives : inversibilité locale, résolution d'équations, recherche d'extrema, étude des courbes et surfaces définies par des équations.

1. Différentielle et matrice jacobienne

D Différentiabilité

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. On dit que f est **différentiable en a** s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \quad (h \rightarrow 0).$$

Cette application, unique, est la **différentielle** de f en a , notée $Df(a)$ ou df_a .

Si f est différentiable en a , elle y est continue et admet une dérivée dans toute direction v : $D_v f(a) = Df(a)(v)$. En particulier les dérivées partielles $\partial_j f_i(a)$ existent, et la matrice de $Df(a)$ dans les bases canoniques est la **matrice jacobienne** :

$$J_f(a) = \left(\partial_j f_i(a) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Pour $p = 1$, la ligne $J_f(a)$ est le transposé du **gradient** $\nabla f(a)$, et $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

P Condition suffisante

Si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U (on dit que f est de classe C^1), alors f est différentiable en tout point de U . La réciproque est fausse, et l'existence des seules dérivées partielles ne suffit pas.

E**Exemple 1 : une jacobienne**

Soit $f(x, y) = (xy^2, x + y^3)$. Alors

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}, \quad J_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $4 \times 12 - 4 \times 1 = 44$, non nul : $Df(1, 2)$ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

**Piège classique**

La fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, prolongée par $f(0, 0) = 0$, possède des dérivées partielles en l'origine (toutes deux nulles) mais n'est même pas continue en $(0, 0)$: sur la droite $y = x$ elle vaut $\frac{1}{2}$. Les dérivées partielles seules ne garantissent rien.

2. Composition et règle de la chaîne**P****Différentielle d'une composée**

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a), \quad J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a).$$

E**Exemple 2 : règle de la chaîne**

Posons $f(x, y) = (xy, x - y)$ et $g(u, v) = u^2 + v$, puis $h = g \circ f$. On a $\nabla g(u, v) = (2u, 1)$, donc au point (x, y) :

$$\nabla h = (2xy, 1) \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2xy^2 + 1, 2x^2y - 1).$$

Contrôle direct : $h(x, y) = x^2y^2 + x - y$, dont les dérivées partielles sont bien $2xy^2 + 1$ et $2x^2y - 1$.

Les coordonnées polaires $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ fournissent l'exemple type :

$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$, de déterminant r . Il s'annule seulement à l'origine, où le changement de variables est dégénéré.

Pour une fonction à valeurs réelles, le gradient pointe dans la direction de plus forte croissance et il est **orthogonal aux lignes de niveau**, comme le montre la figure.

3. Formule de Taylor et Hessienne

D Hessienne

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , sa **Hessienne** en a est la matrice symétrique $H_f(a) = (\partial_i \partial_j f(a))_{i,j}$ (symétrie : théorème de Schwarz).

P Taylor-Young à l'ordre 2

Si f est de classe C^2 au voisinage de a , alors

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

E Exemple 3 : un développement

Pour $f(x, y) = e^x \cos y$ en $(0, 0)$: $f = 1$, $\nabla f = (1, 0)$, et $f_{xx} = 1$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = -1$. Donc

$$f(x, y) \approx 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

En $(0,1; 0,2)$ cette approximation donne **1,085** alors que la valeur exacte est $\approx 1,0831$: l'erreur est de l'ordre de 2×10^{-3} , d'ordre trois en la distance à l'origine.

4. Extrema libres

Un extremum local en un point intérieur impose $\nabla f(a) = 0$: le point est alors dit **critique**. La Hessienne permet de conclure dans la plupart des cas.

P**Condition du second ordre**

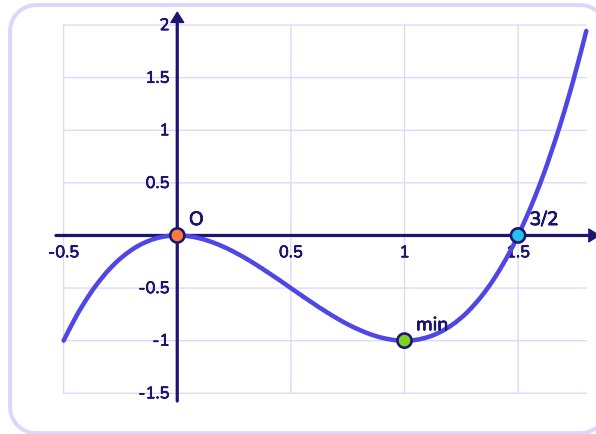
Soit $\mathbf{a}$ un point critique d'une fonction f de classe C^2 . Si $H_f(\mathbf{a})$ est définie positive, f a un minimum local strict en $\mathbf{a}$. Si elle est définie négative, c'est un maximum local strict. Si $H_f(\mathbf{a})$ a deux valeurs propres de signes opposés, $\mathbf{a}$ est un point selle. Si elle est seulement semi-définie, on ne peut pas conclure avec ce critère.

M**Méthode (dimension 2)**

1. Résoudre $\nabla f = \mathbf{0}$ pour trouver les points critiques.
2. Calculer H_f en chacun d'eux, avec $\Delta = \det H_f$ et $\text{tr } H_f$.
3. Si $\Delta > 0$: extremum, minimum si $\text{tr} > 0$, maximum si $\text{tr} < 0$. Si $\Delta < 0$: point selle. Si $\Delta = 0$: étude directe.

E**Exemple 4 : $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$**

$\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = \mathbf{0}$ donne $y = x^2$ et $x = y^2$, donc $x = x^4$: les points critiques sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Avec $H_f = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$: en $(0, 0)$, $\Delta = -9 < 0$, c'est un point selle ; en $(1, 1)$, $\Delta = 27 > 0$ et $\text{tr} = 12 > 0$, c'est un minimum local de valeur $f(1, 1) = -1$.



La courbe ci-dessus montre la restriction de cette fonction à la diagonale $x = y = t$, soit $\varphi(t) = 2t^3 - 3t^2$: on y lit le minimum de valeur -1 en $t = 1$ et à l'origine un maximum local de φ ($\varphi(0) = 0$), alors que $(0, 0)$ est un point selle de f : le long d'une autre direction, par exemple $y = -x$, la fonction $f(t, -t) = 3t^2$ y est minimale.

5. Théorème d'inversion locale

P

Inversion locale

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $a \in U$ tel que $Df(a)$ soit inversible (c'est-à-dire $\det J_f(a) \neq 0$). Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f : V \rightarrow W$ soit bijective, d'inverse de classe C^1 , avec

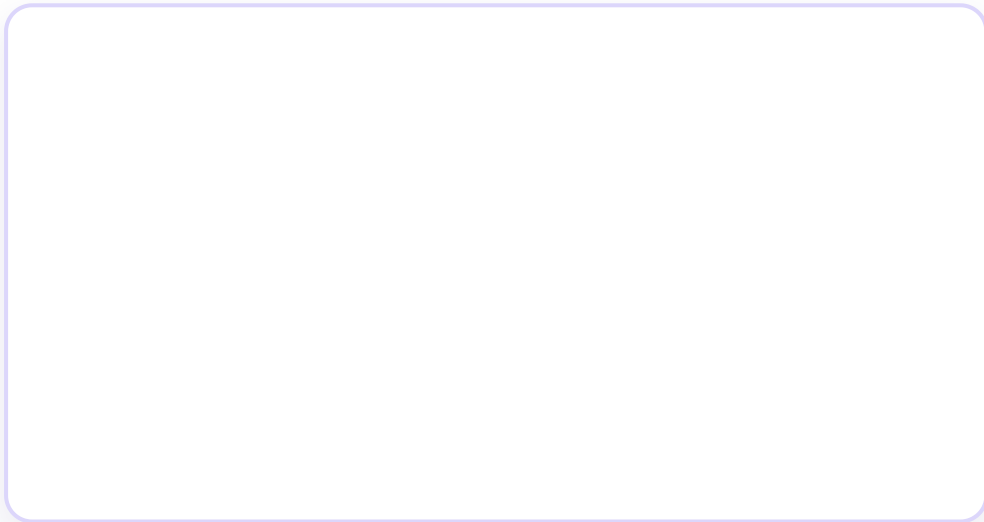
$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

E

Exemple 5 : le carré complexe

Soit $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, c'est-à-dire $z \mapsto z^2$. Alors $J_f = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, de déterminant $4(x^2 + y^2)$. En $a = (1, 1)$, $f(a) = (0, 2)$ et $J_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant 8. L'inverse local a pour jacobienne en $(0, 2)$:

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$



Calcul différentiel Licence L3 : un quadrillage du plan transformé par l'application (x, y) vers $(x^2 - y^2, 2xy)$, avec le point $(1, 1)$ envoyé sur $(0, 2)$



Local n'est pas global

Ici $f(-1, -1) = (0, 2) = f(1, 1)$: l'application n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$, bien que sa différentielle soit inversible en presque tout point. Le théorème ne donne que de l'injectivité *locale*.

6. Théorème des fonctions implicites

P

Fonctions implicites

Soit $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , et (a, b) tel que $F(a, b) = 0$ et que la matrice $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ (dérivées par rapport aux m dernières variables) soit inversible.

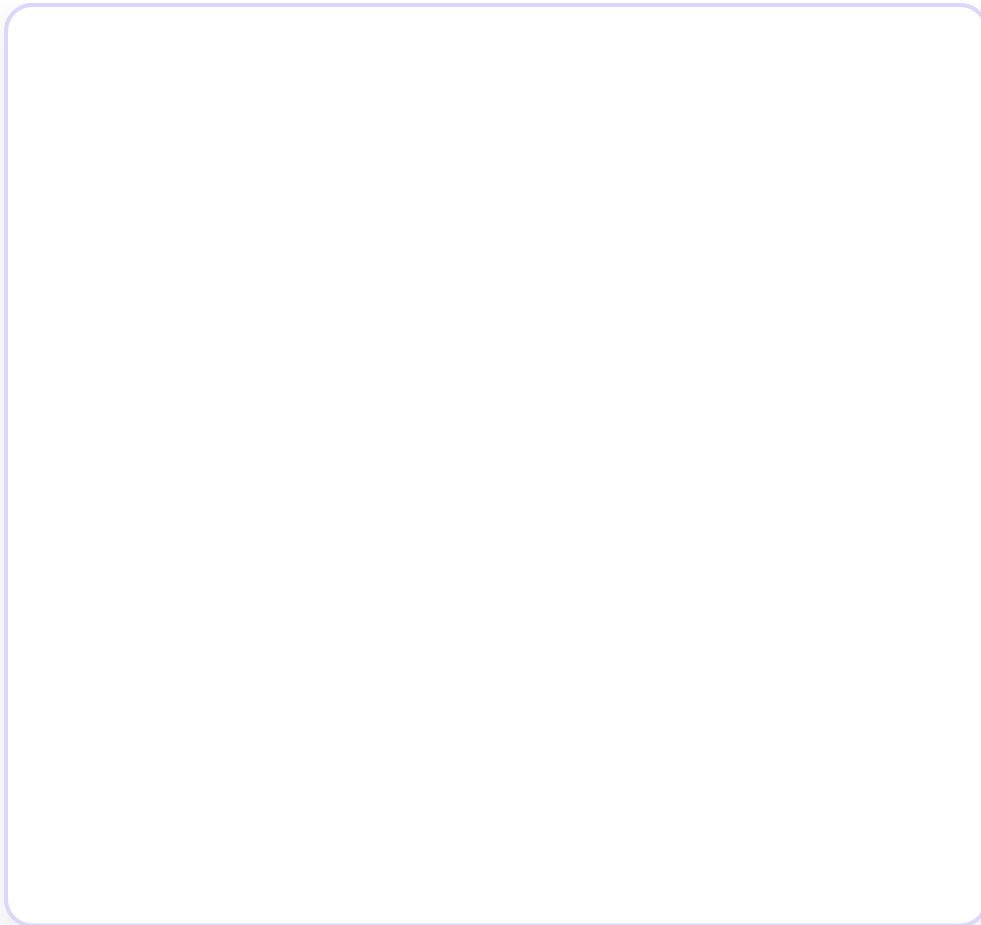
Alors, près de (a, b) , l'ensemble $\{F = 0\}$ est le graphe d'une fonction φ de classe C^1 : $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$, avec $\varphi(a) = b$ et

$$D\varphi(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b).$$

E

Exemple 6 : une courbe implicite

Soit $F(x, y) = x^2y + y^3 - 2$, qui s'annule en $(1, 1)$. On a $F_x = 2xy = 2$ et $F_y = x^2 + 3y^2 = 4 \neq 0$ en ce point. Donc $y = \varphi(x)$ près de $x = 1$, avec $\varphi'(1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. La tangente a pour équation $y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$.



Calcul différentiel Licence L3 : le folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3xy$ avec sa tangente de pente -1 au point $(3/2, 3/2)$ et le point singulier à l'origine

Pour le folium $x^3 + y^3 = 3xy$, le théorème s'applique en $(3/2, 3/2)$, où $\varphi' = -1$. À l'origine au contraire $\nabla F = 0$: les deux dérivées partielles sont nulles, aucune des deux variables ne peut s'exprimer en fonction de l'autre, et la courbe s'y recoupe elle-même.

7. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

D Sous-variété et espace tangent

Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une **sous-variété de dimension d** si, au voisinage de chacun de ses points, elle s'écrit comme ensemble de niveau $\{G = 0\}$ d'une application C^1 $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ dont la différentielle est **surjective**. L'**espace tangent** en a est alors $T_a M = \ker DG(a)$, de dimension d .

E Exemple 7 : un ellipsoïde

Soit $M = \{x^2 + 2y^2 + z^2 = 7\}$, de gradient $\nabla G = (2x, 4y, 2z)$, nul seulement à l'origine, qui n'appartient pas à M : c'est une surface (dimension 2). Au point $(1, 1, 2)$, $\nabla G = (2, 4, 4)$, donc le plan tangent est $2(x - 1) + 4(y - 1) + 4(z - 2) = 0$, soit $x + 2y + 2z = 7$.

I 8. Extrema liés et multiplicateurs de Lagrange

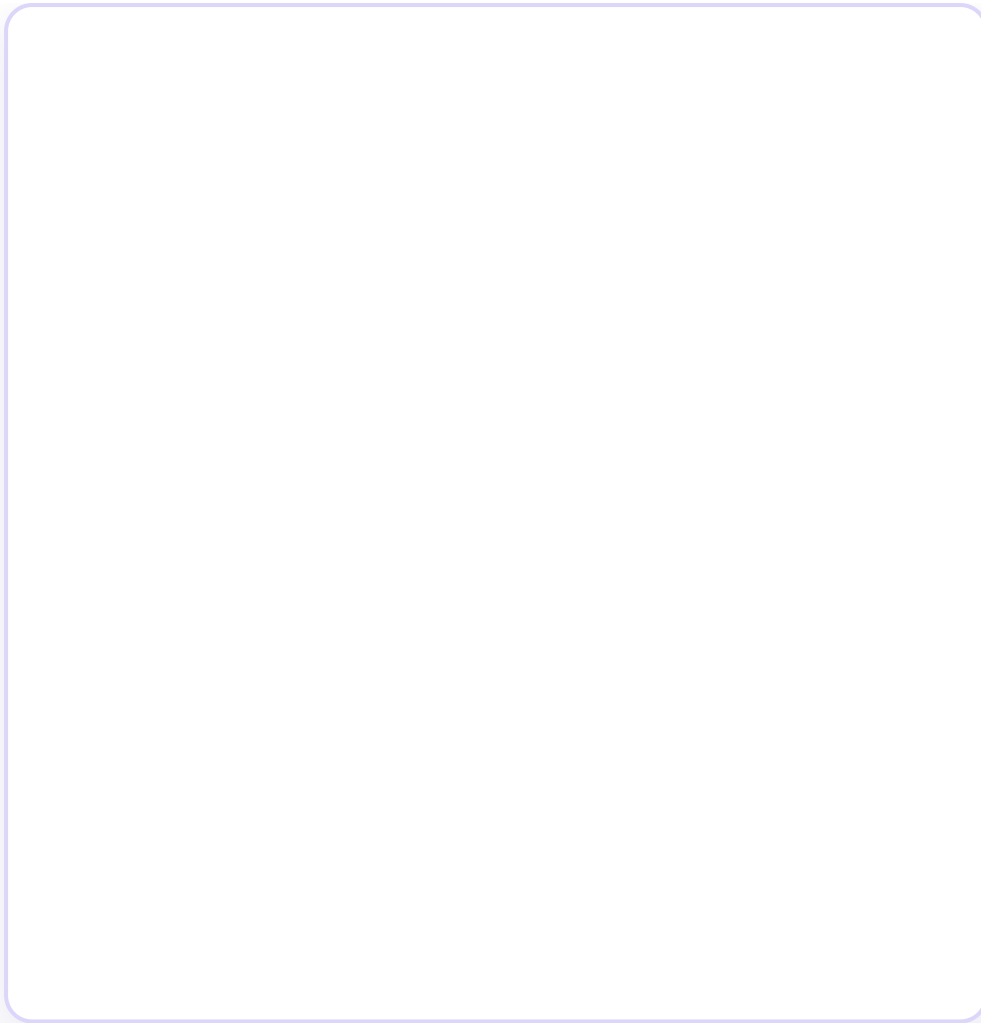
P Condition nécessaire d'extremum lié

Soit f de classe C^1 et $M = \{g = 0\}$ une sous-variété (avec $\nabla g \neq 0$ sur M). Si la restriction de f à M admet un extremum local en a , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, le **multiplicateur de Lagrange**, tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Autrement dit $\nabla f(a)$ est orthogonal à $T_a M$: le long de la contrainte, f est stationnaire. Pour décider de la nature d'un point, on étudie la Hessienne du lagrangien $\mathcal{L} = f - \lambda g$ restreinte à $T_a M$, ou plus simplement on invoque la compacité de M : une fonction continue sur un compact y atteint ses bornes.

E Exemple 8 : un maximum sur un cercle

Cherchons les extrema de $f(x, y) = x + 2y$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 5$. Les équations $(1, 2) = \lambda(2x, 2y)$ donnent $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$, puis $\frac{5}{4\lambda^2} = 5$, d'où $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. Les candidats sont $(1, 2)$ avec $f = 5$ et $(-1, -2)$ avec $f = -5$. Le cercle est compact, donc le maximum est 5 et le minimum est -5.



Calcul différentiel Licence L3 : droites de niveau $x + 2y = c$ tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 5$ aux points $(1,2)$ et $(-1,-2)$, illustration des extrema liés par multiplicateurs de Lagrange



Le mot de Zyro

Pour vérifier un extremum lié, regarde la figure : au meilleur point, la ligne de niveau de **f frôle** la contrainte sans la traverser, car leurs normales sont alignées.

À retenir

- f est différentiable en a si $f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + o(\|h\|)$; la matrice de $Df(a)$ est la jacobienne, et C^1 implique différentiable.
- Composée : $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a)$, produit de matrices dans cet ordre.
- Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2)$.
- Point critique : $\nabla f = 0$; Hessienne définie positive (minimum), définie négative (maximum), valeurs propres de signes opposés (selle).
- Inversion locale : $\det J_f(a) \neq 0$ donne un difféomorphisme local, $D(f^{-1}) = (Df)^{-1}$.
- Fonctions implicites : $\partial_y F(a, b)$ inversible donne $y = \varphi(x)$ et $\varphi' = -F_x/F_y$.
- Sous-variété $\{G = 0\}$ avec DG surjective : $T_a M = \ker DG(a)$; extremum lié : $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: QCM de maths Licence L3

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Fonctions holomorphes : exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage