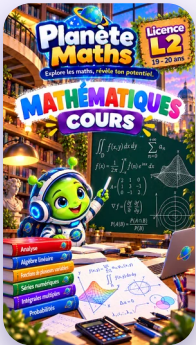


Calcul différentiel à plusieurs variables : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dès qu'une grandeur dépend de plusieurs paramètres à la fois (l'altitude d'un relief selon la position, une énergie selon deux coordonnées, un coût selon trois matières premières), la dérivée d'une fonction d'une variable ne suffit plus. Ce chapitre construit les outils du **calcul différentiel** pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$: dérivées partielles, différentielle, jacobienne, composition, extrema, puis les deux grands théorèmes d'inversion.

1. Dérivées partielles

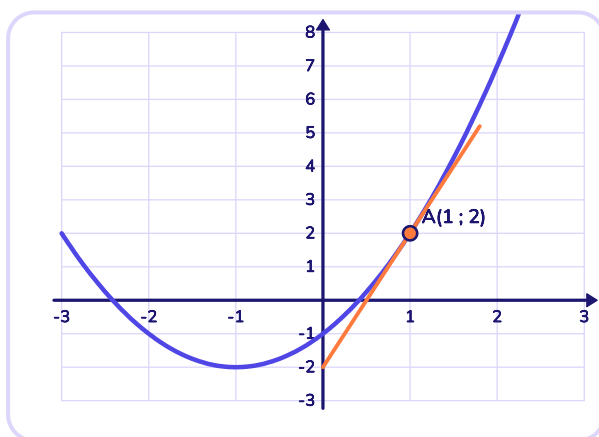
D Dérivée partielle

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $a = (a_1, a_2) \in U$. La dérivée partielle de f par rapport à x en a est, lorsque la limite existe,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ en faisant varier la seconde variable.

Concrètement, on **fige** toutes les variables sauf une et l'on dérive la fonction d'une variable obtenue. Géométriquement, on coupe la surface par un plan vertical et l'on lit la pente de la courbe de section.



E**Exemple : calcul de dérivées partielles**

Soit $f(x, y) = x^2y - y^2 + 2x$. En dérivant par rapport à x avec y constant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2. \text{ Par rapport à } y : \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Au point $(1, 1)$, la section par le plan $y = 1$ est la parabole $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$, de pente $\varphi'(1) = 4 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$, ce qui est cohérent avec la figure.

Le **gradient** regroupe les dérivées partielles : $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$.

**Attention**

L'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne **ni la continuité ni la différentiabilité** de la fonction en ce point. La fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, prolongée par $f(0, 0) = 0$, a des dérivées partielles nulles à l'origine, mais vaut $\frac{1}{2}$ sur la diagonale $y = x$: elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Différentielle

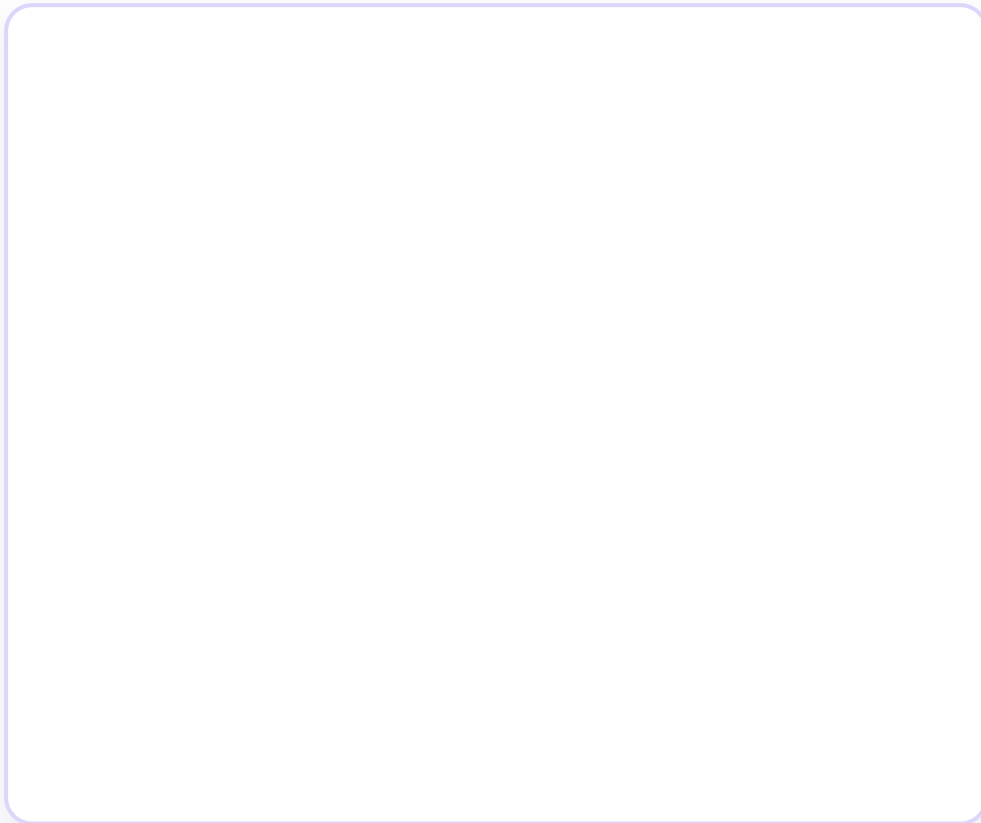
D**Fonction différentiable**

Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, est **différentiable en a** s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \quad (h \rightarrow 0).$$

Cette application, unique, est la **différentielle** de f en a , notée df_a .

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a , admet toutes ses dérivées partielles et la différentielle s'écrit $df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 = \langle \nabla f(a), h \rangle$. Pour tout vecteur unitaire u , la dérivée directionnelle vaut $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$: elle est maximale quand u est colinéaire au gradient, qui est donc la direction de plus forte croissance et reste **perpendiculaire** à la ligne de niveau.



Calcul différentiel Licence L2 : lignes de niveau elliptiques de $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ et vecteur gradient au point $(1 ; 1)$, perpendiculaire à la ligne de niveau

La différentielle fournit l'**approximation affine** $f(a + h) \approx f(a) + df_a(h)$, utile pour estimer une valeur sans la calculer exactement.

3. Matrice jacobienne

D Matrice jacobienne

Si $F = (F_1, \dots, F_p) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a , la matrice de dF_a dans les bases canoniques est la matrice jacobienne

$$J_F(a) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}.$$

Elle a p lignes (une par composante) et n colonnes (une par variable). Si $n = p$, son déterminant est le **jacobien**.

E Exemple : passage en coordonnées polaires

Pour $F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$:

$$J_F(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det J_F = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Le jacobien r est le facteur d'échelle des aires bien connu en intégration.

4. Fonctions de classe C^1

Vérifier la différentiabilité par la définition est pénible. Le résultat suivant donne un critère pratique.

P

Théorème (condition suffisante)

Si toutes les dérivées partielles de f existent sur un ouvert U et sont **continues** sur U , alors f est différentiable sur U : on dit que f est de classe C^1 sur U .

Les polynômes, les exponentielles, les sinus et leurs composées, sommes, produits et quotients à dénominateur non nul sont de classe C^1 (et même C^∞) sur leur domaine. La réciproque est fausse : une fonction peut être différentiable sans être C^1 .

5. Dérivée d'une composée

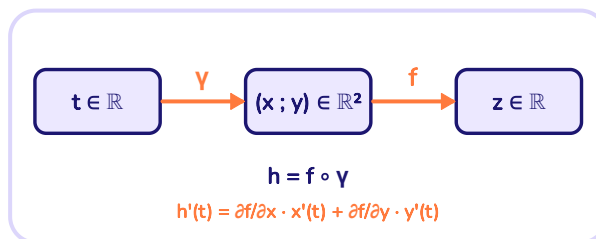
P

Règle de la chaîne

Si F est différentiable en a et G est différentiable en $F(a)$, alors $G \circ F$ est différentiable en a et

$$J_{G \circ F}(a) = J_G(F(a)) \cdot J_F(a).$$

Pour $h(t) = f(x(t), y(t))$, on retrouve $h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$.



E**Exemple : une fonction le long d'une parabole**

Soit $f(x, y) = x^2y$ et $\gamma(t) = (t, t^2)$. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy = 2t^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 = t^2$ le long de la courbe, et $\gamma'(t) = (1, 2t)$. Donc $h'(t) = 2t^3 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t = 4t^3$.

Contrôle direct : $h(t) = t^2 \cdot t^2 = t^4$, donc $h'(t) = 4t^3$.

6. Théorème de Schwarz

P

Théorème de Schwarz

Si f est de classe C^2 sur un ouvert U , alors pour tous indices i, j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Les dérivées partielles secondes croisées commutent : la matrice hessienne est symétrique.

⚠

Attention

L'hypothèse C^2 n'est pas décorative. Pour $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, prolongée par $f(0, 0) = 0$, les deux dérivées croisées à l'origine existent mais valent -1 et $+1$: l'ordre de dérivation compte alors.

7. Extrema et points critiques

D Point critique

Un point a est **critique** pour f différentiable si $\nabla f(a) = 0$. Si f admet un extremum local en un point intérieur du domaine, ce point est critique (condition nécessaire d'ordre 1).

La réciproque est fausse : un point critique peut être un minimum, un maximum, ou un **point selle** (« col »), où la fonction monte dans une direction et descend dans une autre.

8. Hessienne et conditions du second ordre

D Matrice hessienne

Pour f de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la hessienne est

$H_f(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$. La formule de Taylor-Young donne, en un point critique a , $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2)$.

M

Méthode : classer un point critique en dimension 2

1. Résoudre $\nabla f = 0$ pour trouver les points critiques.
2. Calculer la hessienne en chacun et son déterminant $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.
3. Si $\Delta > 0$ et $f_{xx} > 0$: minimum local strict. Si $\Delta > 0$ et $f_{xx} < 0$: maximum local strict.
4. Si $\Delta < 0$: point selle, pas d'extremum.
5. Si $\Delta = 0$: on ne peut pas conclure, il faut étudier directement le signe de $f(a+h) - f(a)$.

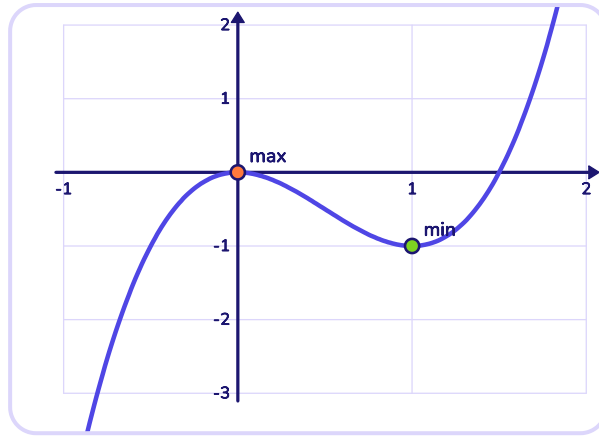
Calcul différentiel Licence L2 : trois lignes de niveau à plusieurs variables, minimum local pour $x^2 + y^2$, maximum local pour $-x^2 - y^2$ et point selle pour $x^2 - y^2$

E

Exemple : quatre points critiques

Soit $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 - 3y^2$. Alors $f_x = 6x^2 + 6y^2 - 6x$ et $f_y = 6y(2x - 1)$. Si $y = 0$, alors $x \in \{0, 1\}$. Si $x = \frac{1}{2}$, alors $y^2 = \frac{1}{4}$. Les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$.

La hessienne est $\begin{pmatrix} 12x - 6 & 12y \\ 12y & 12x - 6 \end{pmatrix}$. En $(0, 0)$: $\Delta = 36 > 0$ et $f_{xx} = -6 < 0$, maximum local, valeur 0. En $(1, 0)$: $\Delta = 36 > 0$ et $f_{xx} = 6 > 0$, minimum local, valeur -1 . En $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$: $\Delta = -36 < 0$, points selles.



9. Inversion locale et fonctions implicites

P Théorème d'inversion locale

Soit $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $a \in U$. Si $J_F(a)$ est inversible, alors F est un difféomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de $F(a)$, et $J_{F^{-1}}(F(a)) = J_F(a)^{-1}$.

P Théorème des fonctions implicites

Soit $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Alors, au voisinage de a , la courbe $F(x, y) = 0$ est le graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ de classe C^1 avec $\varphi(a) = b$ et

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

E**Exemple : une courbe implicite**

Soit $F(x, y) = x^3 + xy + y^3 - 3$. On a $F(1, 1) = 0$, $F_x = 3x^2 + y = 4$ et $F_y = x + 3y^2 = 4 \neq 0$ en $(1, 1)$. La courbe est localement un graphe $y = \varphi(x)$ avec $\varphi'(1) = -\frac{4}{4} = -1$. La tangente en $(1, 1)$ a pour équation $y = 2 - x$.

!**Astuce de Zyro**

Pour savoir si une application est localement inversible, ne cherchez pas son inverse : calculez seulement le déterminant de sa jacobienne. S'il ne s'annule pas au point, l'inversion locale est assurée.

À retenir

- Une **dérivée partielle** se calcule en figeant les autres variables ; le **gradient** les rassemble.
- f différentiable en a : $f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$; différentiable implique continue, mais les dérivées partielles seules ne suffisent pas.
- La **jacobienne** J_F a p lignes et n colonnes ; classe C^1 (partielles continues) implique différentiable.
- **Composée** : $J_{G \circ F} = J_G \cdot J_F$, donc $h' = f_x x' + f_y y'$ le long d'une courbe.
- **Schwarz** : si f est C^2 , la hessienne est symétrique.
- Extremum intérieur implique $\nabla f = 0$; classement par $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$: $\Delta > 0$ extremum, $\Delta < 0$ selle, $\Delta = 0$ indécis.
- Inversion locale : $\det J_F(a) \neq 0$. Fonctions implicites : $F_y(a, b) \neq 0$, puis $\varphi' = -F_x/F_y$.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
exercices de maths Licence L2

Contrôles de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
contrôle de maths Licence L2

QCM de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
QCM de maths Licence L2

Exercices de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Intégrales doubles et triples : exercices
de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage