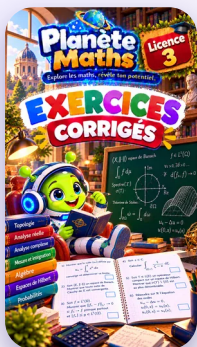


Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Dérivées partielles et gradient



On dérive en considérant l'autre variable comme constante : $\partial_x f = 3x^2y - 2y^2$ et $\partial_y f = x^3 - 4xy$.

En $(2, -1)$: $\partial_x f = 3 \times 4 \times (-1) - 2 \times 1 = -14$ et $\partial_y f = 8 - 4 \times 2 \times (-1) = 16$.

Donc $\nabla f(2, -1) = (-14, 16)$.

2 Une jacobienne 3×2



La jacobienne a 3 lignes (une par composante) et 2 colonnes (une par variable) :

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } (1, 2) : J_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

3 Approximation linéaire



$\partial_x f = 2xy = 6$ et $\partial_y f = x^2 = 1$ en a . Donc $Df(a)(h) = 6 \times 0,1 + 1 \times (-0,2) = 0,4$.

Exactement : $f(1,1; 2,8) = 1,21 \times 2,8 = 3,388$ et $f(a) = 3$, soit un accroissement de 0,388.

L'écart est de 0,012, négligeable devant la taille de h : c'est le terme $o(\|h\|)$.

4 Vrai ou faux ?



a. Vrai : c'est le théorème de la condition suffisante, des dérivées partielles continues entraînent la différentiabilité.

b. Faux : $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (avec $f(0, 0) = 0$) a ses dérivées partielles nulles en $(0, 0)$ mais vaut $\frac{1}{2}$ sur la droite $y = x$ privée de l'origine, donc n'est pas continue en $(0, 0)$.

c. Vrai : c'est la définition, $Df(a)$ est la partie linéaire du développement de f en a .

5 Hessienne en un point



$f_x = 2xy$, $f_y = x^2 + 3y^2$, donc $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yy} = 6y$.

En $(1, 1)$: $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, de déterminant $12 - 4 = 8$ et de trace 8.

6 Un point critique



$\nabla f = (2x + y - 3, x + 2y)$. La seconde équation donne $x = -2y$, puis $-4y + y - 3 = 0$, d'où $y = -1$ et $x = 2$.

La Hessienne est constante : $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant $3 > 0$ et de trace $4 > 0$: elle est définie positive.

Le point $(2, -1)$ est un minimum local, de valeur $f(2, -1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

7 Température et direction



$\nabla T = (-2x, -4y)$, donc $\nabla T(1, 1) = (-2, -4)$.

$D_u T(1, 1) = \langle \nabla T, u \rangle = -2 \times \frac{3}{5} - 4 \times \frac{4}{5} = -\frac{22}{5} = -4,4$.

La température baisse d'environ $4,4$ °C par unité de longueur dans cette direction.

8 Règle de la chaîne



$f(1, 2) = (-1, 2)$. $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$, donc $J_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\nabla g(u, v) = (2u + 3v, 3u)$, donc $\nabla g(-1, 2) = (4, -3)$.

$\nabla h(1, 2) = (4, -3) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (8 - 6, -4 - 3) = (2, -7)$.

9 Jacobienne polaire



$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$, de déterminant $r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$.

En $(2, \pi/6)$: $J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, de déterminant $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$, ce qui vaut bien r .

10 Taylor d'un logarithme



Posons $s = 1 + x + 2y$. Alors $f_x = \frac{1}{s}$, $f_y = \frac{2}{s}$, $f_{xx} = -\frac{1}{s^2}$, $f_{xy} = -\frac{2}{s^2}$, $f_{yy} = -\frac{4}{s^2}$.

$$\text{En } (0,0) : f = 0, \nabla f = (1, 2), H = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$f(x, y) = x + 2y - \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + o(\|(x, y)\|^2) = (x + 2y) - \frac{1}{2}(x + 2y)^2 + o(\|(x, y)\|^2).$$

. On retrouve le développement de $\ln(1 + t)$ en $t = x + 2y$.

11 Estimer une valeur



$$f_x = \cos x e^y, f_y = \sin x e^y, f_{xx} = -\sin x e^y, f_{xy} = \cos x e^y, f_{yy} = \sin x e^y.$$

$$\text{En } (0,0) : f = 0, \nabla f = (1, 0), f_{xx} = 0, f_{xy} = 1, f_{yy} = 0. \text{ Donc } f(x, y) \approx x + xy.$$

En $(0,1; 0,2) : 0,1 + 0,02 = 0,12$. La valeur exacte est $\approx 0,1219$: l'erreur est inférieure à 2×10^{-3} .

12 Nature de deux points critiques



$$\nabla f = (3x^2 - 3, 2y), \text{ nul pour } x = \pm 1 \text{ et } y = 0 : \text{points } (1, 0) \text{ et } (-1, 0).$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ En } (1, 0), H = \text{diag}(6, 2) \text{ est définie positive : minimum local,}$$

$$f(1, 0) = -2.$$

En $(-1, 0)$, $H = \text{diag}(-6, 2)$ a deux valeurs propres de signes opposés : point selle.

13 Inversion locale en un point



$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$, de déterminant $4xy - 1$. En $(1, 1)$ il vaut $3 \neq 0$ et f est C^1 : le théorème s'applique. Ici $f(1, 1) = (2, 2)$.

$$D(f^{-1})(2, 2) = (J_f(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le théorème ne s'applique pas aux points de l'hyperbole $4xy = 1$, où la jacobienne est singulière.

14 Une dérivée implicite



Soit $F(x, y) = x^2y + y^3 - 2$, de classe C^1 , avec $F(1, 1) = 0$ et $F_y(1, 1) = 1 + 3 = 4 \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites, $y = \varphi(x)$ près de $x = 1$.

$$\varphi'(1) = -\frac{F_x(1, 1)}{F_y(1, 1)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Approximation affine : $\varphi(1, 1) \approx 1 - \frac{1}{2} \times 0,1 = 0,95$.

15 Dérivées partielles sans différentiabilité



Continuité. $|f(x, y)| \leq |y|$ car $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$; donc $f(x, y) \rightarrow 0$.

Dérivées partielles. $f(t, 0) = 0$ et $f(0, t) = 0$, donc $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$, et le gradient serait $(0, 0)$.

Non-différentiabilité. Si f était différentiable en 0 , on aurait $D_v f(0) = \langle \nabla f(0), v \rangle = 0$ pour tout v . Mais pour $v = (1, 1)$, $f(t, t) = \frac{t}{2}$, donc $D_v f(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. Contradiction : f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

16 Distance minimale à un plan

★★★

Contrainte $g = x + 2y + 3z - 14 = 0$, avec $\nabla g = (1, 2, 3) \neq 0$. La condition $\nabla f = \lambda \nabla g$ donne $(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 2, 3)$, soit $(x, y, z) = \frac{\lambda}{2}(1, 2, 3)$.

La contrainte devient $\frac{\lambda}{2}(1 + 4 + 9) = 14$, donc $7\lambda = 14$ et $\lambda = 2$, d'où $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ avec $f = 14$.

Comme f est coercive sur le plan (elle tend vers $+\infty$ à l'infini) et continue, elle atteint un minimum, qui ne peut être que ce seul point critique. La distance minimale est $\sqrt{14}$.

17 Boîte de surface fixée

★★★

Contrainte : $g = 2(xy + yz + zx) - 54 = 0$. Les équations de Lagrange $\nabla V = \lambda \nabla g$ s'écrivent $yz = 2\lambda(y + z)$, $xz = 2\lambda(x + z)$, $xy = 2\lambda(x + y)$.

En multipliant respectivement par x, y, z , on obtient

$xyz = 2\lambda x(y + z) = 2\lambda y(x + z) = 2\lambda z(x + y)$. Comme $xyz > 0$, $\lambda \neq 0$ et $x(y + z) = y(x + z)$, donc $xz = yz$, soit $x = y$. De même $y = z$.

La boîte est un cube de côté a avec $6a^2 = 54$, donc $a = 3$ dm et $V = 27$ dm³.

Ce point est bien un maximum : sur la surface, $xy, yz, zx \leq 27$ donc le volume est borné, et il tend vers 0 au bord, si bien que le maximum est atteint à l'intérieur, en l'unique point critique.

18 Une dérivée seconde implicite

★★★

Soit $F = x^3 + y^3 - 3xy$, $F_x = 3(x^2 - y)$, $F_y = 3(y^2 - x)$. En $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

$F_y = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \neq 0$: le théorème s'applique.

$$\varphi' = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x}; \text{ en } \frac{3}{2} : \varphi' = -\frac{3/4}{3/4} = -1.$$

Posons $N = x^2 - \varphi$, $D = \varphi^2 - x$. Alors $N' = 2x - \varphi' = 4$, $D' = 2\varphi\varphi' - 1 = -4$, et

$$\varphi'' = -\frac{N'D - ND'}{D^2} = -\frac{4 \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times 4}{\frac{9}{16}} = -\frac{6}{9/16} = -\frac{32}{9}.$$

Comme $\varphi'(\frac{3}{2}) = -1$ et $\varphi'' < 0$, la courbe est concave en ce point.

19 Plans tangents d'un hyperboloïde

★★★

Posons $G = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. $\nabla G = (2x, 2y, -2z)$ ne s'annule qu'en $(0, 0, 0)$, point qui n'est pas sur M ($G(0) = -1$). La différentielle de G est donc surjective sur M : c'est une sous-variété de dimension $3 - 1 = 2$.

En $(1, 1, 1)$: $G(1, 1, 1) = 0$ et $\nabla G = (2, 2, -2)$. Plan tangent :

$$2(x - 1) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0, \text{ soit } x + y - z = 1.$$

En $(1, 0, 0)$: $\nabla G = (2, 0, 0)$, plan tangent $x = 1$.

20 Quand la Hessienne ne conclut pas

★★★

Pour f comme pour g , $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, seulement semi-définie positive ($\det = 0$) : le critère du second ordre ne conclut pas.

Pour f : $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$, c'est un minimum (global).

Pour g : $g(x, 0) = x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, mais $g(0, y) = -y^4 < 0$ pour $y \neq 0$: g prend des valeurs des deux signes autour de l'origine, c'est un point selle.

21 Inverse local à l'ordre 2



$J_f(0, 0) = I_2$ est inversible et $f(0, 0) = (0, 0)$: d'après le théorème d'inversion locale, f admet un inverse local g de classe C^1 (et même C^∞ car f l'est), avec $g(0) = 0$ et $Dg(0) = I_2$.

Donc $x = u + O(\|(u, v)\|^2)$ et $y = v + O(\|(u, v)\|^2)$. Les équations $u = x + y^2$ et $v = y + x^2$ donnent $x = u - y^2 = u - v^2 + O(\|(u, v)\|^3)$ et $y = v - x^2 = v - u^2 + O(\|(u, v)\|^3)$.

Ainsi $g(u, v) = (u - v^2, v - u^2) + o(\|(u, v)\|^2)$.

22 Extrema globaux sur un disque



D est compact et f continue : les extrema existent.

Intérieur. $\nabla f = (2xy, x^2) = 0$ impose $x = 0$, et alors $f = 0$.

Bord. Sur $x^2 + y^2 = 3$, $f = (3 - y^2)y =: k(y)$ pour $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. $k'(y) = 3 - 3y^2$ s'annule en $y = \pm 1$: $k(1) = 2$ (aux points $(\pm\sqrt{2}, 1)$) et $k(-1) = -2$ (aux points $(\pm\sqrt{2}, -1)$). Aux extrémités $y = \pm\sqrt{3}$, $k = 0$.

Le maximum est 2 et le minimum est -2.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: QCM de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$: contrôle de maths Licence L3

 Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Fonctions holomorphes : exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Équations différentielles : QCM de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage