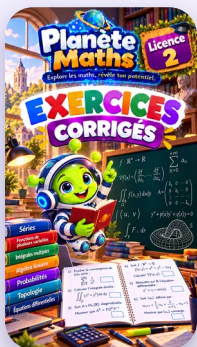


Calcul différentiel à plusieurs variables : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Dérivées partielles d'un polynôme



On fixe y pour dériver en x : $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 2$.

On fixe x pour dériver en y : $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 15y^2$.

2 Gradient en un point



$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^y \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = x e^y.$$

En $(2, 0)$: $e^0 = 1$ et $2e^0 = 2$, donc $\nabla g(2, 0) = (1, 2)$.

3 Vrai ou faux : partielles et continuité



L'affirmation est **fausse**.

On a $f(t, 0) = 0$ et $f(0, t) = 0$ pour tout t , donc les deux dérivées partielles existent en $(0, 0)$ et valent 0.

Mais $f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ pour $t \neq 0$, qui ne tend pas vers $f(0, 0) = 0$: f n'est pas continue en $(0, 0)$.

4 Une jacobienne 3×2



Les trois composantes donnent trois lignes, les deux variables deux colonnes :

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

5 Dérivée dans une direction



$\nabla f = (2xy, x^2)$, donc $\nabla f(1, 2) = (4, 1)$.

Comme $\|u\| = 1$, $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle = 4 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$.

6 Approximation affine



$f(1, 3) = 9$, $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 = 9$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 6$ en $(1, 3)$.

Avec $h = (0,02; -0,01)$: $df(h) = 9 \cdot 0,02 + 6 \cdot (-0,01) = 0,12$.

Donc $f(1,02; 2,99) \approx 9,12$ (la valeur exacte est 9,118902).

7 Vérifier Schwarz



$$f_x = 2xe^{3y}, \text{ puis } \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = 6xe^{3y}.$$

$$f_y = 3x^2e^{3y}, \text{ puis } \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = 6xe^{3y}.$$

Les deux dérivées croisées sont égales, comme l'assure le théorème de Schwarz (f est de classe C^2).

8 Chaîne le long d'un cercle



$f_x = y$ et $f_y = x + 2y$. Avec $x = \cos t$, $y = \sin t$, $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$:

$$h'(t) = \sin t(-\sin t) + (\cos t + 2\sin t)\cos t = \cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t \cos t = \cos 2t + \sin 2t$$

.

Direct : $h(t) = \sin t \cos t + \sin^2 t = \frac{1}{2}\sin 2t + \sin^2 t$, donc $h'(t) = \cos 2t + \sin 2t$. Les deux résultats coïncident.

9 Composée de deux applications



$$F(1, 2) = (3, 2). \nabla g(x, y) = (2x, 1), \text{ donc } \nabla g(3, 2) = (6, 1). J_F(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$J_F(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla h(1, 2) = (6, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (6 + 2, 6 + 1) = (8, 7).$$

Direct : $h(u, v) = (u + v)^2 + uv$, $h_u = 2(u + v) + v = 8$ et $h_v = 2(u + v) + u = 7$ en $(1, 2)$.

10 Coordonnées polaires



$f_x = 2x$, $f_y = 2y$. Alors $\frac{\partial g}{\partial r} = 2x \cos \theta + 2y \sin \theta = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 2x(-r \sin \theta) + 2y(r \cos \theta) = -2r^2 \cos \theta \sin \theta + 2r^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

On remarque que $g(r, \theta) = r^2$ ne dépend pas de θ , ce qui est cohérent avec le calcul.

11 Un minimum global



$\nabla f = (2x + y - 3, x + 2y)$. Le système $2x + y = 3$, $x + 2y = 0$ donne $x = 2$, $y = -1$.

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $\Delta = 4 - 1 = 3 > 0$ et $f_{xx} = 2 > 0$, donc minimum local en $(2, -1)$, de valeur $f(2, -1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

Comme f est un polynôme du second degré dont la partie quadratique

$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ est définie positive, ce minimum est en fait **global**.

12 Un col et un minimum



$\nabla f = (3x^2 - 12, 2y - 4)$ s'annule pour $x = \pm 2$ et $y = 2$: points $(2, 2)$ et $(-2, 2)$.

$H_f = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En $(2, 2)$: $\Delta = 24 > 0$, $f_{xx} = 12 > 0$: minimum local, $f(2, 2) = -20$.

En $(-2, 2)$: $\Delta = -24 < 0$: point selle.

13 Tangente à une courbe implicite



Posons $F(x, y) = x^3 + xy + y^3 - 3$: $F(1, 1) = 0$, $F_y = x + 3y^2 = 4 \neq 0$ en $(1, 1)$. Le théorème des fonctions implicites s'applique.

$F_x = 3x^2 + y = 4$, donc $\varphi'(1) = -\frac{4}{4} = -1$ et la tangente est $y - 1 = -(x - 1)$, soit $y = 2 - x$.

14 Inversibilité locale



$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}, \det J_F = 1 - 4xy.$$

F est de classe C^1 et localement inversible en tout point où $xy \neq \frac{1}{4}$.

Comme $F(0, 0) = (0, 0)$ et $J_F(0, 0) = I_2$, on a $J_{F^{-1}}(0, 0) = I_2$.

15 Problème de la boîte



On pose $z = 12 - x - y$ et $V(x, y) = xy(12 - x - y)$. Alors $V_x = y(12 - 2x - y)$ et $V_y = x(12 - x - 2y)$.

Avec $x, y > 0$: $2x + y = 12$ et $x + 2y = 12$, donc $x = y = 4$, $z = 4$.

$V_{xx} = -2y = -8$, $V_{xy} = 12 - 2x - 2y = -4$, $V_{yy} = -8$: $\Delta = 64 - 16 = 48 > 0$ et $V_{xx} < 0$, maximum local.

Le domaine $\{x, y > 0, x + y < 12\}$ est un triangle ouvert sur le bord duquel V tend vers 0, alors que $V(4, 4) = 64 > 0$: l'unique point critique donne donc le maximum global.

Le volume maximal est 64 dm^3 , pour un cube d'arête 4 dm.

16 Partielles sans différentiabilité



Continuité : $|f(x, y)| \leq |x|$ car $y^2 \leq x^2 + y^2$, donc $f(x, y) \rightarrow 0$.

Partielles : $f(t, 0) = f(0, t) = 0$, donc $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Si f était différentiable en $(0, 0)$, sa différentielle serait nulle et on aurait $f(h) = o(\|h\|)$. Or pour $h = (t, t)$, $t > 0$: $f(h) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2}$ et $\|h\| = t\sqrt{2}$, le quotient vaut $\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.

Contradiction : f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

17 Contre-exemple à Schwarz

★★★★

Pour $y \neq 0$: $\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} \rightarrow -y$ quand $h \rightarrow 0$, donc $f_x(0, y) = -y$.

De même $f_y(x, 0) = x$.

Alors $\frac{\partial}{\partial y}(f_x)(0, 0) = -1$ et $\frac{\partial}{\partial x}(f_y)(0, 0) = 1$.

Les dérivées croisées diffèrent : f n'est pas de classe C^2 en $(0, 0)$, ce qui n'est pas contradictoire avec le théorème de Schwarz.

18 Deux minima globaux

★★★★

$\nabla f = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$. On obtient $y = x^3$ puis $x^9 = x$, donc $x \in \{0, 1, -1\}$: points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

$H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$. En $(0, 0)$: $\Delta = -16 < 0$, point selle. En $(\pm 1, \pm 1)$:

$\Delta = 144 - 16 = 128 > 0$ et $f_{xx} = 12 > 0$: minima locaux, $f = 1 + 1 - 4 = -2$.

Comme $f(x, y) \geq x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) \rightarrow +\infty$ à l'infini, le minimum est atteint en un point critique : le minimum global vaut -2 , atteint en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

19 Cas dégénéré

★★★★

$\nabla f = (2x, 3y^2)$ s'annule uniquement en $(0, 0)$. $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant 0 : le critère ne conclut pas.

Étude directe : $f(0, 0) = 0$, $f(0, y) = y^3$ est positive pour $y > 0$ et négative pour $y < 0$.

Dans tout voisinage de l'origine, f prend des valeurs des deux signes : ce n'est ni un minimum ni un maximum local.

20

Exponentielle complexe vue comme application

★★★

$$J_F = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}, \det J_F = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} > 0. \text{ Par inversion}$$

locale, F est un difféomorphisme local en tout point.

Mais $F(x, y + 2\pi) = F(x, y)$: deux points distincts ont la même image, F n'est pas injective. L'inversibilité locale ne donne donc pas l'inversibilité globale.

21

Dérivées d'ordre 2 d'une fonction implicite

★★★

Posons $F(x, y) = y^3 + y - x$: $F_y = 3y^2 + 1 > 0$, donc φ existe, et

$$\varphi' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{1}{3\varphi^2 + 1}. \text{ En } x = 2 : \varphi'(2) = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{En dérivant : } \varphi'' = -\frac{6\varphi\varphi'}{(3\varphi^2 + 1)^2}. \text{ En } x = 2 : \varphi''(2) = -\frac{6 \cdot \frac{1}{4}}{16} = -\frac{3}{32}.$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)


Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
exercices de maths Licence L2

 QCM de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
QCM de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Calcul différentiel à plusieurs variables :
contrôle de maths Licence L2

 Exercices de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Intégrales doubles et triples : exercices
de maths Licence L2

 QCM de maths

Intégrales généralisées et à paramètre :
QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage