

Arithmétique et structures : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 PGCD de deux entiers



$126 = 1 \times 84 + 42$ puis $84 = 2 \times 42 + 0$. Le dernier reste non nul est 42, donc $126 \wedge 84 = 42$.

Le PPCM vaut $\frac{126 \times 84}{42} = 252$.

2 Diviseurs de 90



$90 = 2 \times 3^2 \times 5$, donc $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs : 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

3 Décomposition en facteurs premiers



$756 = 2 \times 378 = 2^2 \times 189 = 2^2 \times 3^3 \times 7$. Le nombre de diviseurs est $(2+1)(3+1)(1+1) = 24$.

4 Restes par congruences



La somme des chiffres de 2024 est 8, donc $2024 \equiv 8 \pmod{9}$. Ensuite $2024 = 7 \times 289 + 1$, donc $2024 \equiv 1 \pmod{7}$. Les restes sont 8 et 1.

5 Équation dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$



Première équation : $x = 2 - 5 = -3 \equiv 4$. Pour la seconde, l'inverse de 3 modulo 7 est 5 (car $15 = 2 \times 7 + 1$), donc $x = 5 \times 4 = 20 \equiv 6$. Contrôle : $3 \times 6 = 18 \equiv 4$.

6 Premiers entre eux



$51 - 50 = 1$. D'après Bézout, $17 \wedge 10 = 1$. En réduisant modulo 17, $-5 \times 10 \equiv 1$, donc l'inverse de 10 est $-5 \equiv 12$. Contrôle : $120 = 7 \times 17 + 1$.

7 Sous-groupe ou non ?



Les impairs ne contiennent pas l'élément neutre 0 : ce n'est pas un sous-groupe (de plus $1 + 1 = 2$ est pair). Les multiples de 6 forment $6\mathbb{Z}$, qui contient 0 et est stable par différence : c'est un sous-groupe.

8 PGCD et PPCM



$924 = 2 \times 396 + 132$, $396 = 3 \times 132$. Donc $924 \wedge 396 = 132$ et le PPCM vaut $\frac{924 \times 396}{132} = 2772$.

9 Relation de Bézout



L'algorithme d'Euclide donne $38 = 2 \times 15 + 8$, $15 = 8 + 7$, $8 = 7 + 1$. En remontant :
 $1 = 8 - 7 = 2 \times 8 - 15 = 2 \times (38 - 2 \times 15) - 15 = 2 \times 38 - 5 \times 15$. Donc
 $(u, v) = (2, -5)$, et $76 - 75 = 1$.

10 Équations diophantiennes



1) $15 \wedge 21 = 3$ divise 9 ; on simplifie : $5x + 7y = 3$. Une solution particulière est $(2, -1)$
car $10 - 7 = 3$. Comme $5 \wedge 7 = 1$, le lemme de Gauss donne les solutions
 $(x, y) = (2 + 7k, -1 - 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
2) Le PGCD 3 ne divise pas 10 : aucune solution.

11 Puissance modulo 7



7 est premier et ne divise pas 3, donc $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Comme $100 = 6 \times 16 + 4$,
 $3^{100} \equiv 3^4 = 81 \equiv 4 \pmod{7}$. Le reste est 4.

12 Congruence linéaire



$7 \wedge 15 = 1$ et $7 \times 13 = 91 = 6 \times 15 + 1$: l'inverse de 7 est 13. Donc
 $x \equiv 13 \times 4 = 52 \equiv 7 \pmod{15}$. Contrôle : $7 \times 7 = 49 = 3 \times 15 + 4$.

13 Un groupe de quatre éléments



Les produits sont dans G (voir la table du cours), la loi est associative, 1 est neutre. On a
 $3 \times 3 = 9 \equiv 1$, $5 \times 5 = 25 \equiv 1$, $7 \times 7 = 49 \equiv 1$: chaque élément est son propre inverse.
Donc G est un groupe. Aucun élément n'est d'ordre 4 (tous sont d'ordre 1 ou 2), donc G
n'est pas cyclique.

14 Sous-groupe engendré dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$



Les multiples de 8 modulo 20 sont $8, 16, 24 \equiv 4, 12, 20 \equiv 0$. Le sous-groupe est $\{0, 4, 8, 12, 16\}$, d'ordre $20/(8 \wedge 20) = 20/4 = 5$. Et $5 \mid 20$: Lagrange est vérifié.

15 Un sous-groupe de $\mathbb{Q}^*$



$1 = 2^0 3^0 \in H$. Soit $x = 2^a 3^b$ et $y = 2^c 3^d$ dans H . Alors $xy^{-1} = 2^{a-c} 3^{b-d}$ avec $a-c, b-d \in \mathbb{Z}$, donc $xy^{-1} \in H$. Par la caractérisation, H est un sous-groupe de $\mathbb{Q}^*$.

16 Noyau et image



Si $x \equiv x' \pmod{12}$, alors $5x \equiv 5x' \pmod{15}$: f est bien définie. Puis

$f(x+y) = 5x+5y = f(x)+f(y)$: c'est un morphisme.

$5x \equiv 0 \pmod{15} \iff 3 \mid x$, donc $\ker f = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. L'image est $\{0, 5, 10\}$. Les ordres sont 5 et 3 ; leur produit vaut 15, l'ordre du groupe de départ.

17 Une propriété des PGCD



Supposons qu'un nombre premier p divise $a+b$ et ab . Comme $p \mid ab$, $p \mid a$ ou $p \mid b$ (lemme d'Euclide). Si $p \mid a$, alors $p \mid (a+b) - a = b$, donc p divise a et b , ce qui contredit $a \wedge b = 1$. Le cas $p \mid b$ est symétrique. Aucun premier ne divise les deux, donc $(a+b) \wedge (ab) = 1$.

18 Fermat et grande puissance



13 est premier et ne divise pas 2, donc $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Or $2026 = 12 \times 168 + 10$, donc $2^{2026} \equiv 2^{10} = 1024 \pmod{13}$. Comme $1024 = 78 \times 13 + 10$, le reste est 10.

19

Inversibles et diviseurs de zéro

★★★★

Un élément a est inversible si et seulement si $a \wedge 12 = 1$: ce sont **1, 5, 7, 11**. Un diviseur de zéro : $3 \times 4 = 12 \equiv 0$ avec $3, 4 \neq 0$.

Les carrés : $1^2 = 1, 5^2 = 25 \equiv 1, 7^2 = 49 \equiv 1, 11^2 = 121 \equiv 1$, et aucun autre élément ne convient : il y a 4 solutions. Dans le corps $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0$ n'a que deux solutions ± 1 , car un corps n'a pas de diviseur de zéro.

20

Une équation du second degré dans F7

★★★★

Calculons $x^2 + x + 3$ pour $x = 0, \dots, 6$ modulo 7 :

3, 5, 9 $\equiv$ 2, 15 $\equiv$ 1, 23 $\equiv$ 2, 33 $\equiv$ 5, 45 $\equiv$ 3. Aucune valeur n'est nulle : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. (Cohérent avec le discriminant $1 - 12 = -11 \equiv 3$, qui n'est pas un carré modulo 7 : les carrés sont **0, 1, 2, 4**.)

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)


Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Arithmétique et structures : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Arithmétique et structures : QCM de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Arithmétique et structures : contrôle de maths Licence L1

 Exercices de maths

Espaces vectoriels : exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Applications linéaires et matrices : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Espaces vectoriels : QCM de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage