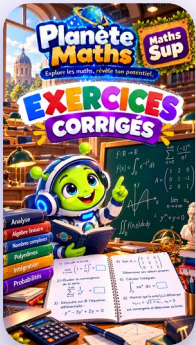


Arithmétique et polynômes : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Billes en sacs



On cherche le plus grand multiple de **53** inférieur à **2457** : $53 \times 46 = 2438$ et $53 \times 47 = 2491 > 2457$.

Donc $2457 = 53 \times 46 + 19$ avec $0 \leq 19 < 53$.

Le collectionneur remplit **46** sacs complets et il lui reste **19** billes.

2 Dividende négatif



Le reste doit être positif : le multiple de **8** situé juste sous **-123** est $8 \times (-16) = -128$.

$-123 = 8 \times (-16) + 5$ avec $0 \leq 5 < 8$: quotient **-16**, reste **5**.

3 Carrelage



Le côté du carreau divise **168** et **126** : on cherche leur PGCD.

$168 = 1 \times 126 + 42$; $126 = 3 \times 42 + 0$. Le dernier reste non nul est **42**.

Les carreaux mesurent **42** cm de côté. On en place $168/42 = 4$ dans la longueur et $126/42 = 3$ dans la largeur, soit $4 \times 3 = 12$ carreaux.

4 Vrai ou faux en arithmétique



- a. Faux : $91 = 7 \times 13$.
- b. Vrai : tout entier pair supérieur à **2** est divisible par **2** et par lui-même, donc non premier.
- c. Faux : **6** divise 2×3 mais ne divise ni **2** ni **3**. Ce résultat n'est valable que pour un nombre **premier**.
- d. Faux : un nombre premier est supérieur ou égal à **2** ; **1** n'a qu'un seul diviseur positif.

5 Degrés de polynômes



$A + B = (X^4 - X^4) + X^2 - 3X + 1 = X^2 - 3X + 1$: le degré est **2**, plus petit que $\max(4, 4) = 4$ car les termes dominants se compensent.

Pour le produit, $\deg(AB) = \deg A + \deg B = 4 + 4 = 8$.

6 Racines de $x^3 - 4x$



$P = X(X^2 - 4) = X(X - 2)(X + 2)$. Les racines sont **-2**, **0** et **2**, toutes simples (trois racines pour un degré **3**).

Sur la courbe : $P(x) > 0$ pour $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$ et $P(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[$. Vérification : $P(1) = -3 < 0$ et $P(-1) = 3 > 0$.

7 Somme et produit



a) La somme des racines est **9** et leur produit **20** : ce sont **4** et **5** ($4 + 5 = 9$, $4 \times 5 = 20$).
Donc $X^2 - 9X + 20 = (X - 4)(X - 5)$.

b) Ce sont les racines de $X^2 - 13X + 40$, de discriminant $169 - 160 = 9$: $x = \frac{13 \pm 3}{2}$,
soit **5** et **8**.

8 Puissance et reste



On a $2^3 = 8 = 7 + 1$, donc 2^3 a pour reste **1** dans la division par **7**, et il en est de même de toute puissance de 2^3 .

$100 = 3 \times 33 + 1$, donc $2^{100} = (2^3)^{33} \times 2$ a le même reste que 1×2 . Le reste est **2**.

9 PGCD et coefficients de Bézout



a) $1785 = 3 \times 546 + 147$; $546 = 3 \times 147 + 105$; $147 = 1 \times 105 + 42$;
 $105 = 2 \times 42 + 21$; $42 = 2 \times 21 + 0$. Le PGCD est **21**.

b) On remonte : $21 = 105 - 2 \times 42 = 105 - 2(147 - 105) = 3 \times 105 - 2 \times 147$; puis
 $105 = 546 - 3 \times 147$ donne $21 = 3 \times 546 - 11 \times 147$; enfin $147 = 1785 - 3 \times 546$
donne $21 = 36 \times 546 - 11 \times 1785$.

Donc $u = -11$ et $v = 36$. Contrôle : $36 \times 546 = 19656$, $11 \times 1785 = 19635$, la différence vaut **21**.

10 Équation diophantienne



Algorithme d'Euclide : $14 = 9 + 5$, $9 = 5 + 4$, $5 = 4 + 1$. On remonte :

$$1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \times 5 - 9 = 2(14 - 9) - 9 = 2 \times 14 - 3 \times 9.$$

En multipliant par 5 : $14 \times 10 + 9 \times (-15) = 5$. Une solution plus simple est $(1, -1)$:
 $14 - 9 = 5$.

Si (x, y) est solution, $14(x - 1) = -9(y + 1)$. Comme $14 \wedge 9 = 1$, le théorème de Gauss donne $9 \mid x - 1$, soit $x = 1 + 9k$, puis $y = -1 - 14k$.

Réciproquement ces couples conviennent : $14(1 + 9k) + 9(-1 - 14k) = 5$. Ensemble des solutions : $\{(1 + 9k, -1 - 14k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

11 Application du théorème de Gauss



a) $9 = 2 \times 4 + 1$, donc $9 \wedge 4 = 1$. Comme $9 \mid 4n$ et $9 \wedge 4 = 1$, le théorème de Gauss donne $9 \mid n$.

b) Non : $12 \wedge 6 = 6 \neq 1$, Gauss ne s'applique pas. Contre-exemple : $n = 2$, $6n = 12$ est divisible par 12, mais 2 ne l'est pas.

12 Nombre de diviseurs



$$360 = 8 \times 45 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Un diviseur positif s'écrit $2^a 3^b 5^c$ avec $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 2$, $0 \leq c \leq 1$ (unicité de la décomposition), soit $4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs.

13 Division de polynômes



On écrit $A = 2X^4 - X^3 + 0X^2 + 3X - 1$.

1. $2X^2 \cdot B = 2X^4 - 2X^3 + 4X^2$; reste partiel $X^3 - 4X^2 + 3X - 1$.

2. $X \cdot B = X^3 - X^2 + 2X$; reste partiel $-3X^2 + X - 1$.

3. $-3 \cdot B = -3X^2 + 3X - 6$; reste $-2X + 5$, de degré $1 < 2$.

Donc $Q = 2X^2 + X - 3$ et $R = -2X + 5$. Contrôle : $BQ = 2X^4 - X^3 + 5X - 6$, et en ajoutant R on retrouve A .

14 Racine double



$P(2) = 8 - 12 + 4 = 0$. $P' = 3X^2 - 6X$ donc $P'(2) = 12 - 12 = 0$. $P'' = 6X - 6$
donc $P''(2) = 6 \neq 0$: la multiplicité est exactement 2.

Donc $P = (X - 2)^2(X - a)$. En comparant les termes constants, $4 \cdot (-a) = 4$, soit $a = -1$. On vérifie : $(X^2 - 4X + 4)(X + 1) = X^3 - 3X^2 + 4$.

Conclusion : $P = (X - 2)^2(X + 1)$.

15 Coefficients inconnus



P divisible par $X - 1$ équivaut à $P(1) = 0$, soit $1 + a + b - 6 = 0$, donc $a + b = 5$.

P divisible par $X + 2$ équivaut à $P(-2) = 0$, soit $-8 + 4a - 2b - 6 = 0$, donc $2a - b = 7$.

En additionnant : $3a = 12$, $a = 4$ et $b = 1$.

$P = X^3 + 4X^2 + X - 6$. Divisible par $(X - 1)(X + 2) = X^2 + X - 2$ (racines distinctes), le quotient est de degré 1 et unitaire : $X + 3$, puisque le terme constant impose $(-2) \cdot 3 = -6$. Donc $P = (X - 1)(X + 2)(X + 3)$.

16 Factorisation de $X^4 + X^2 + 1$

★★★★

a) $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + 1 - X)(X^2 + 1 + X)$.

b) Les deux facteurs ont pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation obtenue en a) est donc la factorisation réelle complète.

Dans $\mathbb{C}[X]$, les racines de $X^2 + X + 1$ sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ et celles de $X^2 - X + 1$ sont $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; le polynôme est le produit des quatre facteurs $X - z$ correspondants.

17 Fonctions symétriques

★★★★

Relations : $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = -(-5) = 5$.

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 - 6 = -2.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{3}{5}.$$

Une somme de carrés négative est impossible pour des réels : au moins une racine n'est pas réelle. Comme P est réel de degré 3, il a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

18 Racines en progression arithmétique

★★★★

Note les racines $r - d, r, r + d$. Leur somme vaut 12 : $3r = 12$, donc $r = 4$.

Leur produit vaut 48 : $r(r^2 - d^2) = 4(16 - d^2) = 48$, donc $d^2 = 4, d = \pm 2$.

Les racines sont 2, 4 et 6. Vérification avec σ_2 : $8 + 12 + 24 = 44$, valeur du coefficient.

19 Trois nombres premiers consécutifs impairs

★★★

Modulo 3, les nombres p , $p + 2$ et $p + 4$ ont pour restes r , $r + 2$, $r + 1$: ils parcourent les trois restes 0, 1, 2. L'un des trois est donc divisible par 3 ; étant premier, il est égal à 3.

$p = 3$ convient (3, 5, 7). $p + 2 = 3$ ou $p + 4 = 3$ donnerait $p = 1$ ou $p = -1$, exclus.

Conclusion : la seule solution est $p = 3$.

20 Somme et PGCD imposés

★★★

Comme 15 divise a et b , on pose $a = 15a'$, $b = 15b'$ avec $a' \wedge b' = 1$. Alors $a' + b' = 12$ et $a' < b'$.

Les couples possibles : (1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7). Seuls (1, 11) et (5, 7) sont formés d'entiers premiers entre eux.

Solutions : $(a, b) = (15, 165)$ et $(75, 105)$.

21 Reste d'une division par $X^2 - 1$

★★★

Le reste est de degré ≤ 1 : $P = (X^2 - 1)Q + aX + b$. Évaluons en 1 et en -1, racines de $X^2 - 1$.

$$P(1) = 1 + 3 - 2 = 2 = a + b \text{ et } P(-1) = 1 - 3 - 2 = -4 = -a + b.$$

En additionnant, $2b = -2$, $b = -1$, puis $a = 3$. Le reste est $3X - 1$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Arithmétique et polynômes : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Arithmétique et polynômes : QCM de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Arithmétique et polynômes : contrôle de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

 QCM de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Maths Sup

Groupes, anneaux et corps : QCM de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage