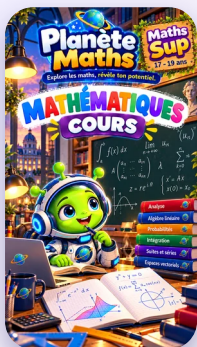


Applications et relations : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une application associe à chaque élément d'un ensemble un unique élément d'un autre ; une relation d'équivalence regroupe les objets que l'on décide de ne plus distinguer. Ces deux notions, avec les relations d'ordre, forment le langage de base de tout le cours d'algèbre de première année.

1. Applications, image et image réciproque

D

Application

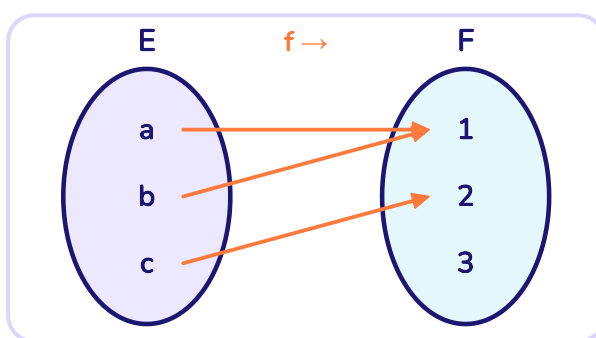
Une application $f : E \rightarrow F$ associe à **chaque** élément x de E un **unique** élément $f(x)$ de F . L'élément $f(x)$ est l'*image* de x ; tout x tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y . Une même image peut avoir plusieurs antécédents ; un même élément ne peut pas avoir deux images.

D Image directe et image réciproque

Pour $A \subset E$ et $B \subset F$:

$$f(A) = \{ f(x) ; x \in A \}, \quad f^{-1}(B) = \{ x \in E ; f(x) \in B \}.$$

L'ensemble $f(E)$ est l'*image* de f , notée **Im** f . Attention : $f^{-1}(B)$ a un sens pour **toute** application, même non bijective.



Sur la figure, $f(\{a, b\}) = \{1\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{a, b\}$, $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ et **Im** $f = \{1, 2\}$.

E Exemple 1 : la fonction carré

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Alors $f([-1, 2]) = [0, 4]$: le minimum 0 est atteint en 0, le maximum 4 en 2. Et $f^{-1}([1, 4]) = \{x ; 1 \leq x^2 \leq 4\} = [-2, -1] \cup [1, 2]$. Enfin $f^{-1}(]-\infty, 0[) = \emptyset$.

P Propriétés de l'image

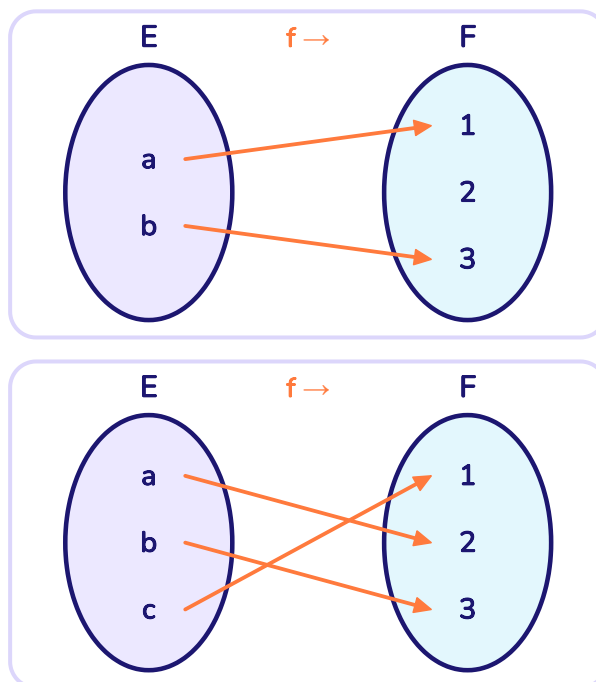
Pour $A_1, A_2 \subset E$: $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ et $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ (l'inclusion peut être stricte). Pour $B_1, B_2 \subset F$:

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \text{ et } f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

2. Injection, surjection, bijection

D Trois propriétés fondamentales

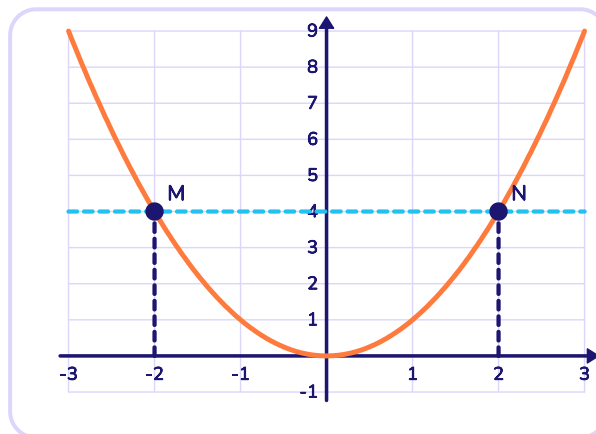
- f est *injective* si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$: deux éléments distincts ont des images distinctes, tout élément de F a **au plus** un antécédent.
- f est *surjective* si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$, c'est-à-dire $f(E) = F$: tout élément de F a **au moins** un antécédent.
- f est *bijective* si elle est injective et surjective : tout élément de F a **exactement** un antécédent.



M

Méthode : étudier injectivité et surjectivité

1. Injectivité : on fixe x, x' avec $f(x) = f(x')$ et on montre $x = x'$. Pour la réfuter, on exhibe deux éléments distincts de même image.
2. Surjectivité : on fixe $y \in F$ et on **résout** l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$. Pour la réfuter, on exhibe un y sans antécédent.
3. Précise toujours les ensembles de départ et d'arrivée : changer l'un d'eux peut changer la réponse.



E

Exemple 2 : la même formule, quatre applications

La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ puisque $f(-2) = f(2) = 4$ (figure ci-dessus). Elle n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car -1 n'a pas d'antécédent. Mais $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ est bijective : si $x^2 = x'^2$ avec $x, x' \geq 0$ alors $x = x'$, et tout $y \geq 0$ a pour antécédent $\sqrt{y}$.



Attention

Pour une application d'un ensemble *fini* dans un ensemble fini *de même cardinal*, injective, surjective et bijective sont trois propriétés équivalentes. Ce n'est **plus** vrai pour les ensembles infinis : $n \mapsto n + 1$ est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sans être surjective.

3. Composition et application réciproque



Composée

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. La composition est associative mais **non commutative**.



Composition et propriétés

Si f et g sont injectives (resp. surjectives, bijectives), alors $g \circ f$ l'est aussi.

Réciproquement : si $g \circ f$ est injective alors f est injective ; si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.



Application réciproque

Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Cette application g , unique, est notée f^{-1} . Elle est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: on défait dans l'ordre inverse, comme on retire ses chaussures avant ses chaussettes.

E**Exemple 3 : calculer une réciproque**

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$. Pour $y \neq 3$, l'équation $\frac{3x+1}{x-1} = y$ équivaut à $3x+1 = yx-y$, soit $x(y-3) = y+1$, donc $x = \frac{y+1}{y-3}$. Cet antécédent existe, il est unique et il est différent de 1 (sinon $y+1 = y-3$). Ainsi f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-3}$. Vérification : $f(2) = \frac{7}{1} = 7$ et $f^{-1}(7) = \frac{8}{4} = 2$.

4. Relations binaires et relations d'équivalence**D****Relation binaire**

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété portant sur des couples $(x, y) \in E^2$, notée $x \mathcal{R} y$. Elle est :

- *réflexive* si $x \mathcal{R} x$ pour tout x ;
- *symétrique* si $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$;
- *antisymétrique* si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ entraînent $x = y$;
- *transitive* si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ entraînent $x \mathcal{R} z$.

D**Relation d'équivalence**

C'est une relation à la fois **réflexive, symétrique et transitive**. On la note souvent $x \sim y$.

E**Exemple 4 : même image**

Pour une application $f : E \rightarrow F$, la relation $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur E : réflexive ($f(x) = f(x)$), symétrique et transitive car l'égalité l'est. Avec $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $x \sim y \iff y = \pm x$.

5. Classes d'équivalence et partition

D**Classe d'équivalence**

Pour $x \in E$, sa classe est $\bar{x} = \{y \in E ; y \sim x\}$. L'ensemble des classes est l'*ensemble quotient*, noté $E/\sim$.

P**Partition**

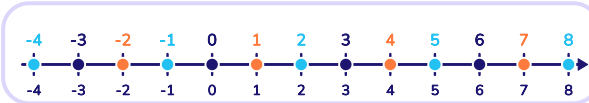
Les classes d'équivalence forment une **partition** de E : elles sont non vides, deux classes sont égales ou disjointes, et leur réunion est E . Réciproquement, toute partition de E définit une relation d'équivalence (« être dans la même partie »).

Preuve de l'essentiel. On a $x \in \bar{x}$ par réflexivité. Si $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$, alors $z \sim x$ et $z \sim y$, donc $x \sim y$ par symétrie puis transitivité ; pour tout $t \sim x$, on a $t \sim y$, d'où $\bar{x} \subset \bar{y}$, et l'autre inclusion est symétrique : $\bar{x} = \bar{y}$.

6. Congruences

D Congruence modulo n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a \equiv b [n]$ lorsque n divise $a - b$. C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ dont les classes sont $\bar{r} = \{r + kn ; k \in \mathbb{Z}\}$ pour $r = 0, \dots, n - 1$: il y a exactement n classes, notées $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.



P Compatibilité

Si $a \equiv a' [n]$ et $b \equiv b' [n]$, alors $a + b \equiv a' + b' [n]$ et $ab \equiv a'b' [n]$. En particulier $a^k \equiv a'^k [n]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En revanche, on ne peut pas simplifier librement : $2 \times 3 \equiv 2 \times 0 [6]$ alors que $3 \not\equiv 0 [6]$.

E Exemple 5 : un grand exposant

Cherchons le reste de 2^{50} dans la division par 7. Comme $2^3 = 8 \equiv 1 [7]$ et $50 = 3 \times 16 + 2$, on a $2^{50} = (2^3)^{16} \times 2^2 \equiv 1^{16} \times 4 = 4 [7]$. Le reste est 4.

M**Méthode : résoudre $ax \equiv b [n]$**

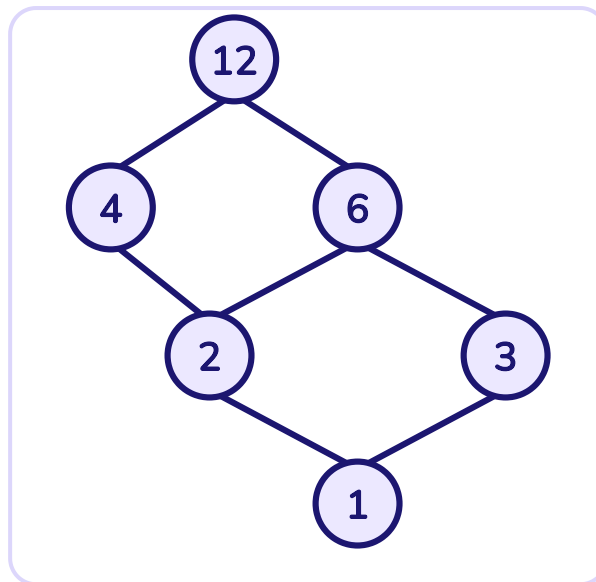
Si a et n sont premiers entre eux, on cherche un inverse u de a modulo n (par essais ou algorithme d'Euclide) puis $x \equiv ub [n]$. Exemple : $4x \equiv 7 [9]$; $4 \times 7 = 28 \equiv 1$, donc $x \equiv 49 \equiv 4 [9]$.

7. Relations d'ordre**D****Relation d'ordre**

C'est une relation **réflexive, antisymétrique et transitive**. L'ordre est *total* si deux éléments quelconques sont comparables ($x \preceq y$ ou $y \preceq x$), sinon il est *partiel*.

E**Exemple 6 : la divisibilité**

Sur $\mathbb{N}^*$, « a divise b » est une relation d'ordre : réflexive ($a \mid a$), transitive, antisymétrique (si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $a \leq b$ et $b \leq a$). L'ordre est partiel : **2** et **3** ne sont pas comparables. Sur les diviseurs de **12**, le diagramme de Hasse relie un élément à ses successeurs immédiats.



D Éléments remarquables

Dans $(E, \preceq)$, un *plus grand élément* est comparable à tous et majore tout E ; un élément est *maximal* si aucun autre élément n'est strictement au-dessus. Plus petit élément et minimal se définissent de même. Ici, **1** est le plus petit et **12** le plus grand élément des diviseurs de **12**.

! Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit qu'une relation d'équivalence, c'est « presque l'égalité » : tu ne distingues plus que les classes. Une relation d'ordre, c'est « presque $\leq$ » : certains éléments ne se comparent tout simplement pas.

À retenir

- $f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$ existe toujours ; f^{-1} comme application n'existe que si f est bijective.
- Injective : au plus un antécédent ; surjective : au moins un ; bijective : exactement un.
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$; $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
- Équivalence = réflexive + symétrique + transitive ; ses classes forment une partition de l'ensemble.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ compte n classes et les congruences sont compatibles avec $+$ et $\times$.
- Ordre = réflexive + antisymétrique + transitive ; total si tous les éléments sont comparables.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Applications et relations : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Applications et relations : contrôle de maths Maths Sup

 QCM de maths

Applications et relations : QCM de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Suites réelles et complexes : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Suites réelles et complexes : contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage