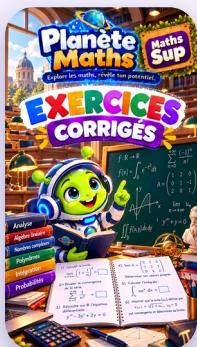


Applications et relations : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Image et image réciproque d'une fonction affine



a. $f(1) = -2, f(2) = 1, f(4) = 7 : f(\{1, 2, 4\}) = \{-2, 1, 7\}.$

b. $x \in f^{-1}([4, 10]) \iff 4 \leq 3x - 5 \leq 10 \iff 9 \leq 3x \leq 15 \iff 3 \leq x \leq 5.$

Donc $f^{-1}([4, 10]) = [3, 5].$

c. $3x - 5 = -5 \iff x = 0 : f^{-1}(\{-5\}) = \{0\}.$

2 Les entiers impairs



Injective : si $2n + 1 = 2m + 1$ alors $n = m$.

Non surjective : $4 = 2n + 1$ donne $n = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc 4 n'a pas d'antécédent.

$f(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des entiers impairs. $f(n) = 7 \iff n = 3$ et $f(n) = 10$ est impossible (10 est pair), donc $f^{-1}(\{7, 10\}) = \{3\}$.

3 Le carré, images et antécédents



a. Le minimum de x^2 sur $[-2, 3]$ est 0 (en 0), le maximum est $\max(4, 9) = 9$. Par continuité, $f([-2, 3]) = [0, 9]$.

b. $1 \leq x^2 \leq 4 \iff 1 \leq |x| \leq 2$, donc $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

c. Un carré n'est jamais strictement inférieur à -1 : $f^{-1}(]-\infty, -1]) = \emptyset$.

d. $x^2 = 0 \iff x = 0$: $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

4 Une application entre ensembles finis



$f(\{1, 3\}) = \{b\}$; $f^{-1}(\{b\}) = \{1, 3\}$; $f^{-1}(\{a, c\}) = \{2, 4\}$.

Non injective : $f(1) = f(3)$ avec $1 \neq 3$. Surjective : $a = f(2)$, $b = f(1)$, $c = f(4)$, donc tout élément de F a un antécédent.

5 Deux composées



$(g \circ f)(1) = g(3) = 9$ et $(f \circ g)(1) = f(1) = 3$.

$(g \circ f)(x) = g(x + 2) = (x + 2)^2$ et $(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + 2$. Elles sont différentes (déjà en $x = 1$) : la composition n'est pas commutative.

6 Parité et relation d'équivalence



Réflexive : $x - x = 0$ est pair. Symétrique : si $x - y$ est pair, $y - x = -(x - y)$ l'est aussi.

Transitive : si $x - y$ et $y - z$ sont pairs, $x - z = (x - y) + (y - z)$ l'est aussi.

Classes : $x \mathcal{R} y$ équivaut à « x et y ont la même parité ». Il y a deux classes : celle des pairs $\bar{0}$ et celle des impairs $\bar{1}$.

7 Restes dans une division



$3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1 \equiv 1 [7]$. Comme $20 = 6 \times 3 + 2$, $3^{20} \equiv 3^2 = 9 \equiv 2 [7]$. Reste : 2

$15 \equiv 4, 17 \equiv 6, 23 \equiv 1 [11]$, donc $15 \times 17 + 23 \equiv 4 \times 6 + 1 = 25 \equiv 3 [11]$. Contrôle : $278 = 11 \times 25 + 3$. Reste : 3.

8 Une fonction rationnelle non injective



a. $f(2) = \frac{2}{5}$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5}$. Deux antécédents distincts pour $\frac{2}{5}$: f n'est pas injective.

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. $f(x) = y \iff yx^2 - x + y = 0$. Si $y = 0$, $x = 0$ convient. Si $y \neq 0$, l'équation du second degré a une solution réelle si et seulement si

$\Delta = 1 - 4y^2 \geq 0 \iff |y| \leq \frac{1}{2}$. Donc $y \in f(\mathbb{R}) \iff |y| \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

9

Calculer une application réciproque

★★★

Pour $y \neq 2$:

$\frac{2x+1}{x-1} = y \iff 2x+1 = yx-y \iff x(y-2) = y+1 \iff x = \frac{y+1}{y-2}$. Cette solution existe et est unique, et elle est différente de 1 (sinon $y+1 = y-2$). Tout $y \neq 2$ a donc exactement un antécédent dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$.

Vérification : $f(3) = \frac{7}{2}$ et $f^{-1}(\frac{7}{2}) = \frac{9/2}{3/2} = 3$.

10

Deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

★★★

f : injective, non surjective (0 n'a pas d'antécédent). g : surjective ($g(2m) = m$), non injective ($g(2) = g(3) = 1$).

$(g \circ f)(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$: valeurs 0, 1, 1, 2, 2, ... ; surjective, non injective.

$(f \circ g)(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$: valeurs 1, 1, 2, 2, ... ; non injective et non surjective (0 jamais atteint).

11

Image d'une intersection

★★★

Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$: il existe $x \in A_1 \cap A_2$ avec $y = f(x)$. Comme $x \in A_1$, $y \in f(A_1)$; comme $x \in A_2$, $y \in f(A_2)$. D'où l'inclusion.

Contre-exemple : $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, $A_1 = \{-1\}$, $A_2 = \{1\}$. Alors $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $f(\emptyset) = \emptyset$, alors que $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$. L'inclusion est stricte.

12 Les points à même distance de l'origine



- a. La relation « avoir même image par $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ » est réflexive, symétrique et transitive car l'égalité l'est.
- b. $3^2 + 4^2 = 25$: la classe de A est le cercle de centre O et de rayon 5 . Il contient $B(5; 0)$, $C(-4; 3)$, $D(0; -5)$.
- c. Il faut $x^2 + y^2 = 25$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Décompositions de 25 en deux carrés : $0 + 25$, $9 + 16$, $16 + 9$, $25 + 0$. Cela donne 4 points pour $\{0, \pm 5\}$ ($(0, \pm 5)$, $(\pm 5, 0)$) et 8 points pour $\{\pm 3, \pm 4\}$: au total 12 points entiers.

13 Une équation de congruence



On cherche l'inverse de 5 modulo 13 : $5 \times 8 = 40 = 3 \times 13 + 1$, donc 8 convient. En multipliant par 8 : $x \equiv 8 \times 4 = 32 \equiv 6 \pmod{13}$. Réciproquement $5 \times 6 = 30 = 2 \times 13 + 4$. Les solutions sont les $x = 6 + 13k$, $k \in \mathbb{Z}$; dans $\{0, \dots, 12\}$, seule $x = 6$.

14 Ordres sur le plan



- a. Réflexive : $a \leq a$ et $b \leq b$. Antisymétrique : si $a \leq c \leq a$ et $b \leq d \leq b$, alors $(a, b) = (c, d)$. Transitive : les inégalités se composent coordonnée par coordonnée. L'ordre n'est pas total : $(1, 3)$ et $(2, 1)$ sont incomparables ($1 \leq 2$ mais $3 > 1$, et $2 > 1$).
- b. Réflexive, antisymétrique, transitive : vérification par disjonction des cas sur la première coordonnée (si $\setminus a$

15 Injectivité et intersection

★★★★

($\Rightarrow$) L'inclusion $\subset$ est toujours vraie. Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2) : y = f(a_1) = f(a_2)$ avec $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. Par injectivité $a_1 = a_2 \in A_1 \cap A_2$, donc $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

($\Leftarrow$) Soient $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$. Prenons $A_1 = \{x\}, A_2 = \{x'\} : A_1 \cap A_2 = \emptyset$, donc $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, alors que $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x)\} \neq \emptyset$: contradiction. Donc f est injective.

16 Composée injective ou surjective

★★★★

- Si $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, d'où $x = x'$.
- Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$; donc $y = f(x) \in F$ vérifie $g(y) = z$.
- $E = \{1\}, F = \{1, 2\}, G = \{1\}, f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1$. Alors $g \circ f = \text{id}_E$ est bijective, f n'atteint pas 2 et $g(1) = g(2)$.

17 Un système de congruences

★★★★

On écrit $x = 5a + 2$. Alors $5a + 2 \equiv 3 \pmod{7}$, soit $5a \equiv 1 \pmod{7}$. Comme $5 \times 3 = 15 \equiv 1$, $a \equiv 3 \pmod{7}$, donc $a = 3 + 7k$ et $x = 5(3 + 7k) + 2 = 17 + 35k$.

Réciproquement, $17 = 3 \times 5 + 2$ et $17 = 2 \times 7 + 3$. Solutions : $x \equiv 17 \pmod{35}$; la plus petite positive est 17.

18 Relation « même cardinal » sur les parties

★★★★

C'est la relation « même image par $A \mapsto |A|$ », donc une équivalence. Une classe est déterminée par la valeur commune du cardinal, qui vaut $0, 1, \dots, 5$: il y a 6 classes. La classe des parties de cardinal k contient $\binom{5}{k}$ éléments : 1, 5, 10, 10, 5, 1. Somme : $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$, ce qui confirme que les classes forment une partition de $\mathcal{P}(E)$.

19 Une bijection sans formule de réciproque

★★★

f est strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes), donc injective. Elle est continue avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$: par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est surjective. Elle est donc bijective.

$f(1) = 2$ donc $f^{-1}(2) = 1$. $f(2) = 8 + 2 = 10$ donc $f^{-1}(10) = 2$. Pour une bijection, il suffit de reconnaître un antécédent pour connaître la valeur de la réciproque.

20 Dénombrer injections, surjections, bijections

★★★

- a. 4 choix pour l'image de 1, puis 3 pour celle de 2 : $4 \times 3 = 12$.
- b. Il y a $2^3 = 8$ applications ; les deux seules non surjectives sont les constantes. Donc $8 - 2 = 6$.
- c. $5! = 120$.
- d. Il y a $3^4 = 81$ applications. Celles qui manquent au moins un élément : par inclusion-exclusion, $3 \times 2^4 - 3 \times 1^4 + 0 = 45$. Donc $81 - 45 = 36$ surjections.

21 Factoriser par la relation « même image »

★★★

- a. $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 - 2(x - y) = (x - y)(x + y - 2)$, nul si et seulement si $y = x$ ou $y = 2 - x$.
- b. Classe de 3 : $\{3, -1\}$ (car $f(3) = 3 = f(-1)$). Classe de 1 : $\{1\}$ puisque $2 - 1 = 1$.
- c. $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, donc $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$. L'application $\bar{x} \mapsto f(x)$ est bien définie (deux éléments de la même classe ont même image), injective (deux classes d'images égales sont égales par définition de $\sim$) et surjective sur $[-1, +\infty[$. Elle est donc bijective.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Applications et relations : exercices de maths Maths Sup

QCM de maths

Applications et relations : QCM de maths Maths Sup

Contrôles de maths

Applications et relations : contrôle de maths Maths Sup

Exercices de maths

Suites réelles et complexes : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths
Maths Sup

 QCM de maths

Suites réelles et complexes : QCM de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage