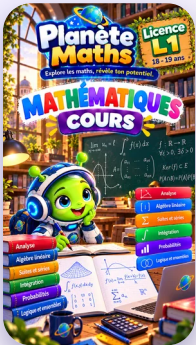


Applications linéaires et matrices : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une matrice n'est pas un simple tableau de nombres : c'est la **description complète d'une transformation linéaire**. Ce chapitre relie les deux points de vue. Vous apprendrez à lire une application linéaire à travers son noyau et son image, à la coder par une matrice, à composer et inverser ces matrices, à changer de base pour simplifier un calcul, puis à résoudre systématiquement les systèmes linéaires par la méthode du pivot.

1. Applications linéaires

D Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** si, pour tous vecteurs u, v de E et tout réel λ :

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Lorsque $F = E$, on parle d'**endomorphisme**.

Une conséquence immédiate : $f(0_E) = 0_F$. Une application qui ne fixe pas l'origine ne peut donc pas être linéaire. Par exemple $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ envoie $(0, 0)$ sur $(1, 0)$: elle n'est pas linéaire, c'est une translation. En revanche $(x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$ l'est, car chaque composante est une combinaison linéaire de x et y , sans terme constant ni produit de variables.

⚠ Attention

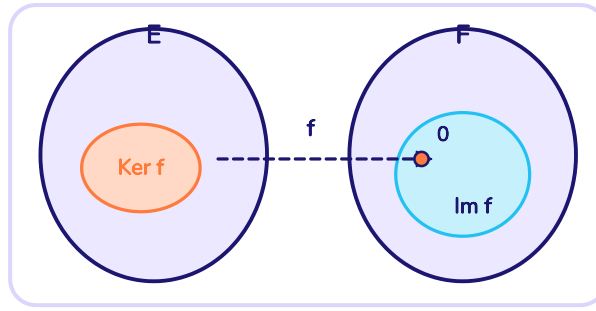
Un terme comme xy , x^2 , $\sin x$ ou une constante ajoutée détruit la linéarité. Pour le prouver, un seul contre-exemple suffit : vérifiez d'abord l'image de 0 .

2. Noyau et image

D Noyau et image

Pour $f : E \rightarrow F$ linéaire, on définit

$$\text{Ker } f = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}, \quad \text{Im } f = \{f(u) \mid u \in E\}.$$



P Propriétés

$\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .
De plus, f est **injective** si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$, et f est **surjective** si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Pourquoi le noyau détecte-t-il l'injectivité ? Si $f(u) = f(v)$, alors $f(u - v) = 0$, donc $u - v$ appartient au noyau ; si le noyau est réduit à 0 , on en tire $u = v$. La réciproque est évidente.

I 3. Le théorème du rang

P Théorème du rang

Si E est de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

Le nombre $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$ s'appelle le **rang** de f .

Idée de la preuve : on choisit une base $(e_1, \dots, e_k)$ du noyau et on la complète en une base de E par $(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Les vecteurs $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ forment alors une base de l'image, car les $f(e_i)$ pour $i \leq k$ sont nuls. On obtient $n = k + (n - k)$.

E**Exemple 1 : noyau, image et rang**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z, x + z)$.

Pour trouver le noyau, on résout $x + 2y - z = 0$, $2x + 4y - 2z = 0$ et $x + z = 0$. La deuxième équation est le double de la première. Avec $z = -x$, la première donne $2x + 2y = 0$, soit $y = -x$. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, -1, -1))$, de dimension 1.

D'après le théorème du rang, $\text{rg } f = 3 - 1 = 2$. Une base de l'image est $((1, 2, 1), (2, 4, 0))$, formée de deux colonnes indépendantes ; c'est le plan d'équation $2x - y = 0$.

4. Matrice d'une application linéaire

D**Matrice dans des bases**

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . La matrice de f dans ces bases est la matrice A à n lignes et p colonnes dont la **colonne** j contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$.

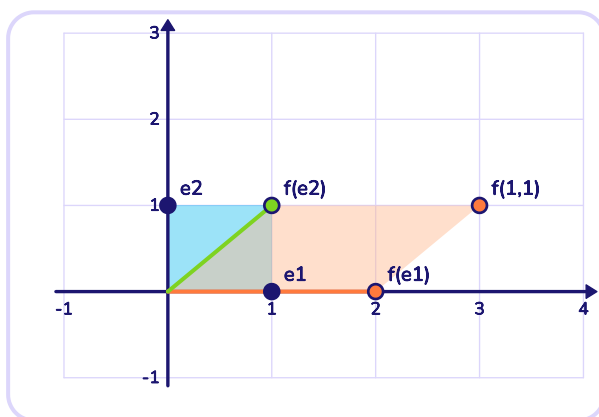
Une application linéaire est entièrement déterminée par les images d'une base : c'est pourquoi une seule colonne par vecteur de base suffit. Si X désigne la colonne des coordonnées de u , alors celle de $f(u)$ est AX .

E Exemple 2 : lire la matrice

Soit $f(x, y) = (2x + y, y)$. Dans la base canonique, $f(e_1) = f(1, 0) = (2, 0)$ et $f(e_2) = f(0, 1) = (1, 1)$. La matrice est donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le carré unité de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ est transformé en un parallélogramme de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 1)$, comme le montre la figure.



5. Produit matriciel et composition

D Produit de matrices

Si A est de taille $n \times p$ et B de taille $p \times q$, le produit AB est de taille $n \times q$ et son coefficient en position (i, j) vaut

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

P**Composition**

Si g a pour matrice B et f a pour matrice A (dans des bases compatibles), alors $f \circ g$ a pour matrice AB . Le produit matriciel est associatif et distributif, mais **pas commutatif** en général.

E**Exemple 3 : non-commutativité**

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux produits existent mais diffèrent : l'ordre des transformations compte.

6. Matrices inversibles

D**Matrice inversible**

Une matrice carrée A d'ordre n est inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Cela équivaut à dire que l'endomorphisme associé est bijectif, donc que son noyau est réduit à $\{0\}$, donc que $\text{rg } A = n$.

Pour une matrice 2×2 , si $\det A = ad - bc \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice plus grande, on applique la méthode du pivot à la matrice augmentée $(A \mid I)$.

M**Méthode : inverser par opérations sur les lignes**

1. Écrire $(A \mid I_n)$.
2. Par opérations élémentaires, transformer la partie gauche en I_n .
3. La partie droite est alors A^{-1} ; si un pivot nul empêche d'aboutir, A n'est pas inversible.

E**Exemple 4 : inverse d'une matrice 3×3**

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient la ligne $(0 \ 0 \ 2 \mid -1 \ 1 \ 1)$. On divise par 2, puis on remonte avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. Il vient

$$N^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Changement de base

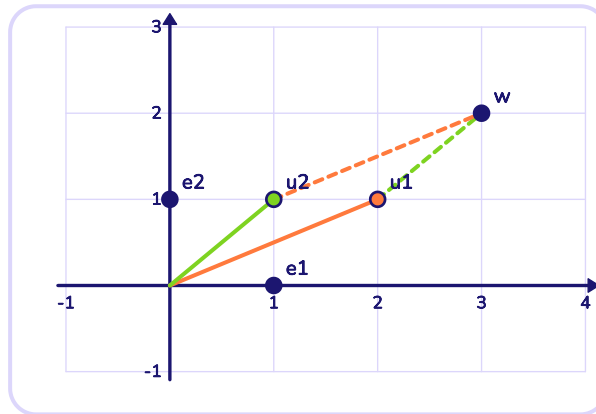
Un même vecteur, une même application, mais des coordonnées différentes selon la base choisie. Soit P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

P

Formules de changement de base

Si X et X' sont les coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $X = PX'$. Si A est la matrice d'un endomorphisme dans $\mathcal{B}$, sa matrice dans $\mathcal{B}'$ est

$$A' = P^{-1}AP.$$



E

Exemple 5 : diagonaliser

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (1, 1)$. On calcule $Au_1 = (4, 2) = 2u_1$ et $Au_2 = (1, 1) = u_2$. Avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

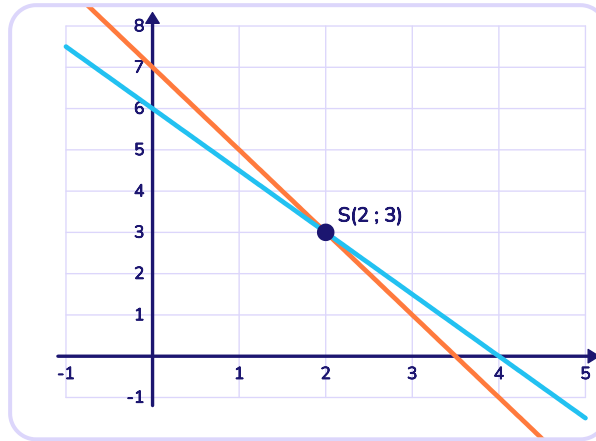
Dans la nouvelle base la transformation est un simple étirement par **2** dans la direction de u_1 : calculer A^n devient facile.

8. Opérations élémentaires et systèmes linéaires

Un système linéaire s'écrit $AX = B$. Trois opérations transforment un système en un système équivalent : échanger deux lignes, multiplier une ligne par un réel non nul, ajouter à une ligne un

multiple d'une autre. Ce sont les **opérations élémentaires**, et chacune revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible.

Avec deux inconnues, chaque équation est une droite du plan et la solution est leur point d'intersection : par exemple, les droites $2x + y = 7$ et $3x + 2y = 12$ se coupent en $(2; 3)$.



M

Méthode du pivot de Gauss

1. Choisir un pivot non nul dans la première colonne et l'utiliser pour annuler les coefficients situés dessous.
2. Recommencer sur le système restant, jusqu'à obtenir une forme échelonnée.
3. Remonter pour résoudre ; le nombre de pivots est le rang de A .

E

Exemple 6 : un système 3×3

Réolvons $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - z = 2$. Avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $-3y - z = -9$ et $y - 2z = -4$. Puis $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$ donne $-7z = -21$, donc $z = 3$, puis $y = 2$ et $x = 1$. La solution est unique : $(1, 2, 3)$.



Structure des solutions

Si $AX = B$ admet une solution particulière X_0 , l'ensemble des solutions est $X_0 + \text{Ker } A$. Il est donc vide, réduit à un point (si $\text{Ker } A = \{0\}$) ou infini. Pour A carrée, l'unicité équivaut à l'inversibilité et la solution est $X = A^{-1}B$.



Astuce de Zyro

Terrien, avant de lancer un long pivot, cherchez une ligne proportionnelle à une autre : un rang plus petit que prévu se repère souvent à l'œil nu.

À retenir

- f est linéaire si elle respecte la somme et la multiplication par un réel ; elle envoie toujours 0 sur 0 .
- $\text{Ker } f$ détecte l'injectivité, $\text{Im } f$ la surjectivité.
- Théorème du rang : $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$.
- La colonne j de la matrice contient les coordonnées de $f(e_j)$; $f \circ g$ correspond à AB .
- A carrée est inversible si et seulement si son noyau est nul, c'est-à-dire si son rang vaut n .
- Changement de base : $A' = P^{-1}AP$.
- Le pivot de Gauss résout les systèmes, calcule le rang et l'inverse ; les solutions de $AX = B$ forment $X_0 + \text{Ker } A$.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Applications linéaires et matrices :
exercices de maths Licence L1

Contrôles de maths

Applications linéaires et matrices :
contrôle de maths Licence L1

QCM de maths

Applications linéaires et matrices : QCM
de maths Licence L1

Exercices de maths

Déterminants : exercices de maths
Licence L1

 Exercices de maths

Logique et ensembles : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Déterminants : contrôle de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage