

Applications linéaires et matrices : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Linéaire ou non ?



- f_1 est linéaire : chaque composante est combinaison linéaire de x et y . Plus précisément, $f_1(\lambda u + v) = \lambda f_1(u) + f_1(v)$ se vérifie composante par composante.
- $f_2(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$: une application linéaire envoie 0 sur 0 , donc f_2 n'est pas linéaire.
- Contre-exemple : $f_3(2, 2) = (4, 2)$ alors que $2f_3(1, 1) = 2(1, 1) = (2, 2)$. La deuxième propriété échoue, f_3 n'est pas linéaire.

2 Lire une matrice



a. Les colonnes sont $g(e_1) = (1, 0)$, $g(e_2) = (-1, 3)$, $g(e_3) = (2, -1)$. Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. $g(2, 1, -1) = (2 - 1 - 2, 3 + 1) = (-1, 4)$, ce que confirme le produit matriciel de la matrice par la colonne $(2, 1, -1)$.

3 Deux produits



$$AB = \begin{pmatrix} 3+4 & 1-4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. BA = \begin{pmatrix} 3 & 6-1 \\ 2 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices sont différentes : le produit matriciel n'est pas commutatif.

4 Un noyau et une image



$h(x, y) = 0$ équivaut à $x = 2y$ (la seconde équation est -3 fois la première). Donc

$\text{Ker } h = \text{Vect}((2, 1))$, de dimension 1. Vérification : $h(2, 1) = (0, -6 + 6) = (0, 0)$.

Théorème du rang : $\text{rg } h = 2 - 1 = 1$. Comme $h(x, y) = (x - 2y)(1, -3)$, l'image est la droite $\text{Vect}((1, -3))$.

5 Inverse d'une matrice 2×2



a. $\det M = 3 \times 2 - 5 \times 1 = 1 \neq 0$, donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $X = M^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vérification : $3 \times 3 + 5 \times (-1) = 4$ et $3 - 2 = 1$.

6 Carnets et stylos



Notons x le prix d'un carnet et y celui d'un stylo : $3x + 2y = 12$ et $2x + y = 7$. La seconde équation donne $y = 7 - 2x$. En remplaçant, $3x + 14 - 4x = 12$, donc $x = 2$ puis $y = 3$.

Un carnet coûte 2 euros et un stylo 3 euros. Vérification : $6 + 6 = 12$ et $4 + 3 = 7$.

7 Vrai ou faux ?



- a. Vrai : $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.
- b. Faux : le contre-exemple de l'exercice 3 montre $AB \neq BA$.
- c. Vrai : le rang est le nombre de colonnes indépendantes (au plus 5) et aussi le nombre de lignes indépendantes (au plus 3), donc au plus 3.
- d. Faux : une matrice inversible a un noyau réduit à 0 ; avec un noyau non nul, elle n'est pas inversible.

8 Rotation puis symétrie



- a. $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- b. $SR = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $s \circ r$) et $RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $r \circ s$). On constate $SR = -RS \neq RS$: l'ordre compte.
- c. $(s \circ r)(1, 2) = SR \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2, -1)$ et $(r \circ s)(1, 2) = (2, 1)$. Directement : $r(1, 2) = (-2, 1)$ puis $s(-2, 1) = (-2, -1)$.

9 Rang et noyau en dimension 4



- a. $f(x, y, z, t) = 0$ équivaut à $y = -x, z = -y = x, t = -z = -x$. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$, de dimension 1.
- b. Théorème du rang : $\text{rg } f = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. L'image est donc $\mathbb{R}^3$ tout entier : f est surjective (mais pas injective, car le noyau est non nul).

10 Matrice de rang 2



- a. $C(1, -2, 1) = (1 - 4 + 3, 4 - 10 + 6, 7 - 16 + 9) = (0, 0, 0)$.
- b. On vérifie $2 \times (2, 5, 8) - (1, 4, 7) = (3, 6, 9)$: la troisième colonne vaut $2C_2 - C_1$. Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc $\text{rg } C = 2$ et $((1, 4, 7), (2, 5, 8))$ est une base de l'image. Le noyau est de dimension $3 - 2 = 1$, engendré par $(1, -2, 1)$.
- c. Un vecteur orthogonal aux deux colonnes est $(1, -2, 1)$, et $(1, 4, 7)$ vérifie $1 - 8 + 7 = 0$, $(2, 5, 8)$ vérifie $2 - 10 + 8 = 0$. L'image est le plan $x - 2y + z = 0$.

11 Inverse d'une matrice triangulaire



- a. On part de $(T \mid I)$. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ donne $(0 \ 1 \ 0 \mid 0 \ 1 \ -3)$. Puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ donne $(1 \ 0 \ 0 \mid 1 \ -2 \ 6)$. Donc

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b. $X = T^{-1}(1, 2, 3) = (1 - 4 + 18, 2 - 9, 3) = (15, -7, 3)$. Vérification : $15 - 14 = 1, -7 + 9 = 2, 3$.

12 Changement de base et puissance



a. $Au_1 = (4 - 2, 1 + 1) = (2, 2) = 2u_1$ et $Au_2 = (8 - 2, 2 + 1) = (6, 3) = 3u_2$.

Donc $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = -1$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$,

$PD^3 = \begin{pmatrix} 8 & 54 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$ et

$$A^3 = \begin{pmatrix} 46 & -38 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}.$$

Contrôle par $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = A^2 A$.

13 Échelonner une matrice



$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $(0 \ 0 \ 3)$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne $(0 \ 0 \ 3)$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $(0 \ 0 \ 0)$. La forme échelonnée a 2 pivots : $\text{rg } M = 2$.

Noyau : $3z = 0$ donc $z = 0$, puis $x + 2y = 0$. Une base du noyau est $((-2, 1, 0))$, de dimension $3 - 2 = 1$, conformément au théorème du rang.

14 Un système 3×3



On échange L_1 et L_2 pour avoir un pivot égal à 1 : $x - y + 2z = 9$. Puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $3y - 3z = -12$, soit $y - z = -4$. Et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne $5y - 7z = -26$.

De $y = z - 4$, on tire $5z - 20 - 7z = -26$, donc $z = 3$, $y = -1$ et $x = 9 + y - 2z = 2$.

Solution : $(2, -1, 3)$. Vérification dans la troisième équation : $6 - 2 - 3 = 1$.

15 Noyau, image et injectivité

★★★

- $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \text{Ker } f$. Si $u, v \in \text{Ker } f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = 0$, donc $\lambda u + v \in \text{Ker } f$.
- $0_F = f(0_E) \in \text{Im } f$. Si $a = f(u)$ et $b = f(v)$, alors $\lambda a + b = f(\lambda u + v) \in \text{Im } f$.
- Si f est injective et $u \in \text{Ker } f$, alors $f(u) = 0 = f(0)$ donc $u = 0$. Réciproquement, si $\text{Ker } f = \{0\}$ et $f(u) = f(v)$, alors $f(u - v) = 0$, donc $u - v = 0$, c'est-à-dire $u = v$.

16 Endomorphisme de carré nul

★★★

- Si $y = f(x)$ est dans l'image, alors $f(y) = f(f(x)) = 0$, donc $y \in \text{Ker } f$.
- L'inclusion donne $\text{rg } f \leq \dim \text{Ker } f = n - \text{rg } f$ d'après le théorème du rang, donc $2 \text{rg } f \leq n$. Pour $n = 7$, $\text{rg } f \leq 3$ (partie entière de 3,5).
- $f(x, y) = (y, 0)$: alors $f(f(x, y)) = f(y, 0) = (0, 0)$, et $\text{rg } f = 1 \leq 1$.

17 Inverse de $I - N$

★★★

a. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = N^2 N = 0$.

b. En développant,

$$(I - N)(I + N + N^2) = I + N + N^2 - N - N^2 - N^3 = I - N^3 = I. \text{ Donc } I - N \text{ est inversible et}$$

$$(I - N)^{-1} = I + N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Le coefficient 5 vaut 2 + 3.)

18 Système à paramètre

★★★★

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $(m-1)y = 0$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $(m-1)z = m-1$.

Cas $m \neq 1$: $y = 0, z = 1$, puis $x = 1 - y - z = 0$. Solution unique $(0, 0, 1)$; on vérifie la troisième équation : $0 + 0 + m = m$.

Cas $m = 1$: les trois équations se réduisent à $x + y + z = 1$. Les solutions forment le plan $\{(1-b-c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$, infini, de direction $\text{Ker } A$ de dimension 2.

19 Projection oblique

★★★★

a. On résout $a + b = 1, 2a + b = 0$: $a = -1, b = 2$, donc $e_1 = -u + 2v$. Pour e_2 :
 $a + b = 0, 2a + b = 1$, donc $a = 1, b = -1$ et $e_2 = u - v$.

b. $p(u) = u$ et $p(v) = 0$ donnent $p(e_1) = -u = (-1, -2)$ et $p(e_2) = u = (1, 2)$. Donc
 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 1-2 & -1+2 \\ 2-4 & -2+4 \end{pmatrix} = A$.

c. Dans (u, v) : $p(u) = 1 \cdot u + 0 \cdot v$ et $p(v) = 0$, la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On lit $\text{rg } p = 1$, $\text{Ker } p = \text{Vect}(v)$.

20 Dérivation des polynômes

★★★★

a. $D(1) = 0, D(X) = 1, D(X^2) = 2X, D(X^3) = 3X^2$. La matrice (4×4) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Le noyau est l'ensemble des polynômes constants, $\text{Vect}(1)$, de dimension 1 ; donc
 $\text{rg } D = 4 - 1 = 3$: l'image est $\mathbb{R}_2[X]$.

c. Les coordonnées de $2X^3 - X + 4$ sont $(4, -1, 0, 2)$. Le produit donne $(-1, 0, 6, 0)$, soit $6X^2 - 1$, ce qui est bien la dérivée.

21 Migration entre deux villes



a. $Mu_1 = (1,8 + 0,2, 0,2 + 0,8) = (2, 1) = u_1$: valeur propre 1.

$Mu_2 = (0,9 - 0,2, 0,1 - 0,8) = (0,7, -0,7) = 0,7u_2$: valeur propre 0,7.

b. Une répartition stable est un multiple de u_1 de somme 6 000 : (4000, 2000).

Vérification : $0,9 \times 4000 + 0,2 \times 2000 = 4000$.

c. On écrit $X_0 = 2000 u_1 - 1000 u_2$ (car $2a + b = 3000$ et $a - b = 3000$ donnent $a = 2000, b = -1000$). Donc

$X_n = 2000 u_1 - 1000 \times 0,7^n u_2 = (4000 - 1000 \times 0,7^n, 2000 + 1000 \times 0,7^n)$.

Pour $n = 1$: $X_1 = (3300, 2700)$, conforme au calcul direct MX_0 . Quand n grandit, on tend vers (4000, 2000).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

 QCM de maths

Applications linéaires et matrices :
exercices de maths Licence L1

Applications linéaires et matrices : QCM
de maths Licence L1



Contrôles de maths

Applications linéaires et matrices :
contrôle de maths Licence L1



Exercices de maths

Déterminants : exercices de maths
Licence L1



Exercices de maths

Logique et ensembles : exercices de
maths Licence L1



QCM de maths

Déterminants : QCM de maths Licence
L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage