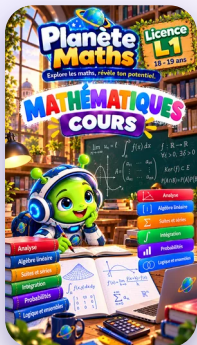


Applications et dénombrement : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dire qu'un objet mathématique « est bien défini », compter des configurations sans les écrire une à une, prouver qu'un phénomène se produit forcément : trois gestes qui reposent sur la notion d'**application** et sur l'art du **dénombrement**. Ce chapitre fixe le vocabulaire des applications (injection, surjection, bijection, images directe et réciproque, composition), puis développe les outils pour compter : cardinaux, arrangements, combinaisons, formule du binôme et principe des tiroirs.

1. Applications entre ensembles

D Application

Soient E et F deux ensembles. Une **application** $f : E \rightarrow F$ associe à **chaque** élément x de E un **unique** élément $f(x)$ de F . L'ensemble E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée. Si $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x et que x est un **antécédent** de y .

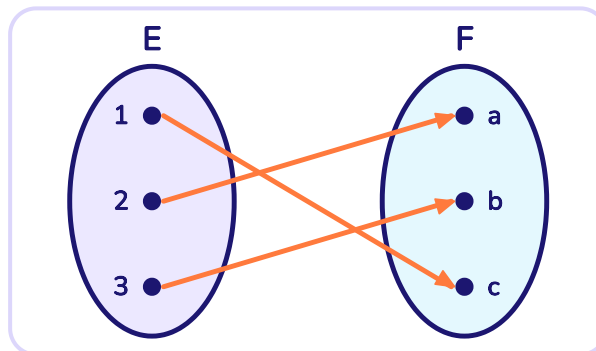
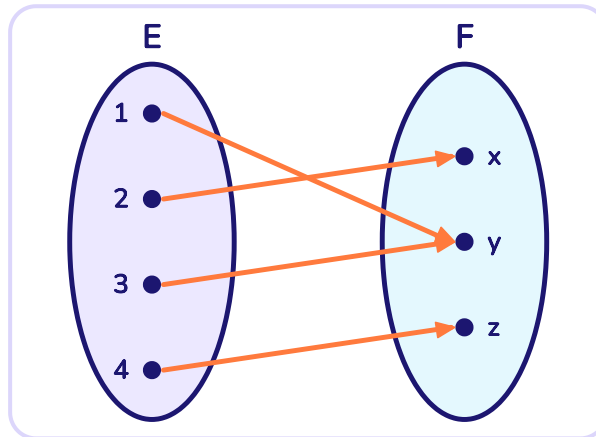
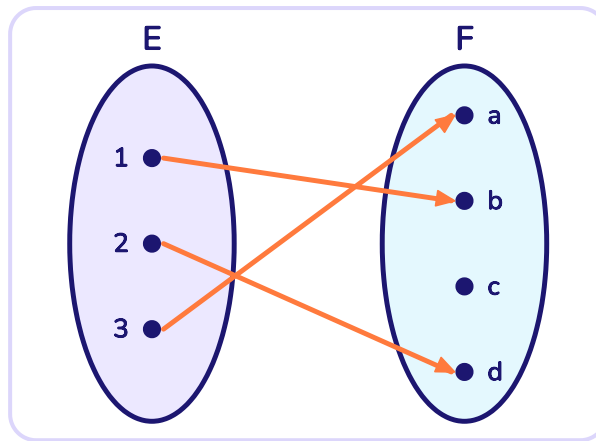
Deux conditions sont donc exigées : aucun élément de E ne reste sans image, et aucun n'en possède deux. Ainsi $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (le réel 0 n'a pas d'image), mais c'en est une de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. Deux applications sont égales lorsqu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et mêmes images en tout point. L'application **identité** de E , notée id_E , envoie chaque x sur lui-même.

2. Injection, surjection, bijection

D Trois propriétés fondamentales

Soit $f : E \rightarrow F$.

- f est **injective** si deux éléments distincts ont toujours des images distinctes : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Chaque élément de F a **au plus** un antécédent.
- f est **surjective** si tout élément de F est une image : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$. Chaque élément de F a **au moins** un antécédent.
- f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective : chaque élément de F a **exactement** un antécédent.



Les trois diagrammes ci-dessus illustrent chaque situation : une injection (un élément de F , la lettre c , n'est pas atteint), une surjection (deux flèches arrivent en y) et une bijection (une flèche exactement par élément d'arrivée).

M**Méthode : prouver qu'une application est injective ou surjective**

1. Injectivité : on suppose $f(x) = f(x')$ et on en déduit $x = x'$. Pour la réfuter, on exhibe deux éléments distincts de même image.
2. Surjectivité : on fixe y dans F et on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans E . Pour la réfuter, on exhibe un y sans antécédent.

E**Exemple 1**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 5$. Si $f(x) = f(x')$, alors $4x - 5 = 4x' - 5$, donc $x = x'$: f est injective. Pour $y \in \mathbb{R}$, l'équation $4x - 5 = y$ a pour solution $x = \frac{y+5}{4} \in \mathbb{R}$: f est surjective. Elle est donc bijective.

En revanche $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ n'est ni injective ($g(-2) = g(2) = 4$) ni surjective (-1 n'a aucun antécédent). Mais g restreinte à $\mathbb{R}_+$ au départ et à l'arrivée est bijective.

A**Attention à l'ensemble d'arrivée**

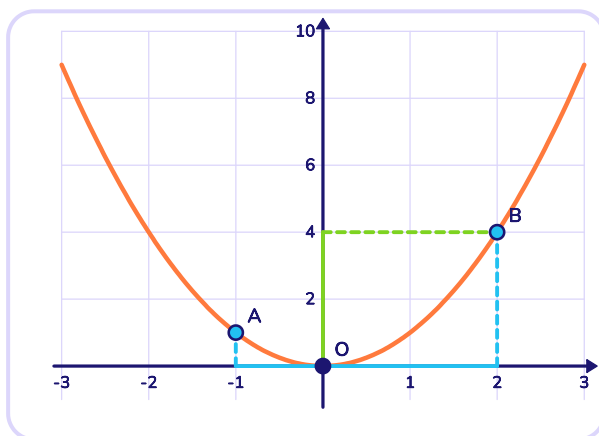
La surjectivité dépend de F : $x \mapsto x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais elle l'est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. Précisez toujours départ et arrivée avant de conclure.

3. Image directe et image réciproque

D Images directe et réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$. Pour $A \subset E$, l'image directe est $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$. Pour $B \subset F$, l'image réciproque est $f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$.

La notation $f^{-1}(B)$ désigne un sous-ensemble de E et ne suppose **pas** que f soit bijective. Sur la parabole ci-dessous, l'image directe de $[-1 ; 2]$ par $x \mapsto x^2$ se lit sur l'axe des ordonnées.



E Exemple 2

Pour $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$: $f([-1 ; 2]) = [0 ; 4]$ (le minimum 0 est atteint en 0, le maximum 4 en 2). Et $f^{-1}([1 ; 4]) = [-2 ; -1] \cup [1 ; 2]$, car $1 \leq x^2 \leq 4$ équivaut à $1 \leq |x| \leq 2$. Enfin $f^{-1}([-3 ; -1]) = \emptyset$.

P**Propriétés**

Pour $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$:

- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$, avec égalité si f est injective ;
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$;
- $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité dans la première si f est injective et dans la seconde si f est surjective.

4. Composition et application réciproque

D**Composée**

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. La composition est associative, mais en général $g \circ f \neq f \circ g$.

P**Composition et injectivité, surjectivité**

- Si f et g sont injectives (resp. surjectives, bijectives), alors $g \circ f$ l'est aussi.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Preuve de la première réciproque. Si $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$.

D**Application réciproque**

Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$. Cette application g est unique : c'est l'**application réciproque** f^{-1} . On a alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ pour deux bijections composables.

E**Exemple 3**

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Pour $y \neq 2$, l'équation $y = \frac{2x+1}{x-1}$ équivaut à $x(y-2) = y+1$, soit $x = \frac{y+1}{y-2}$, qui est bien différent de 1. Il y a donc un unique antécédent : f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$. Vérification : $f(0) = -1$ et $f^{-1}(-1) = 0$.

5. Ensembles finis et cardinal

Un ensemble est **fini** s'il est en bijection avec $\{1, \dots, n\}$ pour un entier n ; ce nombre est son **cardinal**, noté $|E|$ ou $\text{Card}(E)$. Le cardinal du vide est 0.

P**Règles de dénombrement**

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; si $A \cap B = \emptyset$, c'est la somme (principe additif).
- $|A \times B| = |A| \times |B|$ (principe multiplicatif).
- $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$ si $|E| = n$.
- Si $|E| = n$ et $|F| = p$, il y a p^n applications de E dans F .
- Si $|E| = |F| < \infty$: $f : E \rightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ bijective.
- Une injection de E dans F impose $|E| \leq |F|$, une surjection impose $|E| \geq |F|$.



Astuce de Zyro

Pour compter, demande-toi toujours : est-ce que l'ordre compte ? est-ce que les répétitions sont permises ? Ces deux questions choisissent la bonne formule.

6. Arrangements et combinaisons



Arrangements, combinaisons

Soit E de cardinal n et $0 \leq p \leq n$.

- Un **arrangement** de p éléments de E est une liste ordonnée de p éléments distincts. Leur nombre est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \cdots (n-p+1)$.
- Une **combinaison** de p éléments est une partie de E à p éléments. Leur nombre est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Comme chaque combinaison de p éléments se range de $p!$ façons, $A_n^p = p! \binom{n}{p}$. On a aussi $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et la **relation de Pascal** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (on distingue les parties qui contiennent un élément fixé de celles qui ne le contiennent pas). Elle construit le triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

E Exemple 4

Dans un groupe de **20** étudiants, on choisit **3** délégués sans distinction de rôle :

$\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140$ possibilités. Si l'on désigne un président, un secrétaire et un trésorier, l'ordre compte : $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$, soit 6×1140 .

7. La formule du binôme

P

Formule du binôme de Newton

Pour des nombres a, b et un entier $n \geq 0$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

La raison est combinatoire : en développant le produit de n facteurs $(a + b)$, le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît autant de fois qu'il y a de façons de choisir les k facteurs qui fournissent a , c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. Avec $a = b = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; avec $a = 1, b = -1$ et $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

E

Exemple 5

Développons $(2x - 1)^5$. Avec $a = 2x$ et $b = -1$:

$$(2x - 1)^5 = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1.$$

Test : pour $x = 1$, la somme des coefficients vaut

$$32 - 80 + 80 - 40 + 10 - 1 = 1 = 1^5.$$

⚠

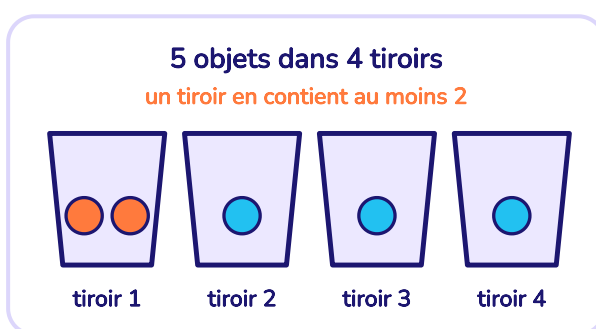
Erreur classique

$(a + b)^2$ n'est pas $a^2 + b^2$: il manque le terme $2ab = \binom{2}{1} ab$. Pensez aussi aux signes quand b est négatif.

8. Le principe des tiroirs

P Principe des tiroirs de Dirichlet

Si l'on range N objets dans n tiroirs avec $N > n$, au moins un tiroir contient au moins deux objets. Plus précisément, un tiroir en contient au moins $\left\lceil \frac{N}{n} \right\rceil$. De façon équivalente, il n'existe aucune injection d'un ensemble fini dans un ensemble strictement plus petit.



E Exemple 6

On choisit 6 nombres dans $\{1, 2, \dots, 10\}$. Montrons que deux d'entre eux ont pour somme 11. Formons les cinq paires $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$: ce sont nos tiroirs. Six nombres dans cinq paires : deux nombres tombent dans la même paire, et leur somme est 11.

À retenir

- Une **application** donne à chaque élément de départ une image et une seule ; injective = au plus un antécédent, surjective = au moins un, bijective = exactement un.
- $f(A)$ est une partie de l'arrivée, $f^{-1}(B)$ une partie du départ ; l'image réciproque respecte unions et intersections, pas l'image directe pour $\cap$.
- Une bijection a une réciproque et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A||B|$, $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$, p^n applications.
- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (ordre) et $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (sans ordre) ; relation de Pascal.
- $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$; principe des tiroirs : $N > n$ objets dans n tiroirs, une collision.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Applications et dénombrement :
exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Applications et dénombrement : contrôle
de maths Licence L1

 QCM de maths

Applications et dénombrement : QCM de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Nombres réels et suites : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths
Licence L1

 Contrôles de maths

Nombres réels et suites : contrôle de
maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage