

Applications et dénombrement : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Est-ce une application ?



- a. Non : 0 n'a pas d'image.
- b. Oui : $x^2 + 1$ est défini pour tout réel et la valeur est unique.
- c. Non : $\sqrt{x}$ n'existe pas pour $x < 0$, par exemple $x = -4$.
- d. Oui : tout réel positif possède une racine carrée positive unique.

2 Lire un diagramme



Les éléments **1** et **2** ont la même image b : f n'est pas injective.

L'élément **c** de F ne reçoit aucune flèche : f n'est pas surjective.

3 Images et antécédents



$f(-2) = 8 - 3 = 5$, $f(0) = -3$, $f(1) = -1$, $f(3) = 18 - 3 = 15$. Donc

$$f(\{-2, 0, 1, 3\}) = \{-3, -1, 5, 15\}.$$

$2x^2 - 3 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4$, donc $f^{-1}(\{5\}) = \{-2, 2\}$. De même $2x^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow x = 0$, donc $f^{-1}(\{-3\}) = \{0\}$.

4 Deux clubs



Avec la formule d'inclusion-exclusion : $|G \cup P| = 24 + 17 - 9 = 32$.

Il y a donc **32** musiciens et $40 - 32 = 8$ élèves qui ne jouent d'aucun des deux instruments.

5 Calculs de base



$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56; A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336; \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45;$$
$$\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9; \binom{7}{0} = 1; 5! = 120.$$

6 Un développement



Les coefficients sont $\binom{4}{k}$: 1, 4, 6, 4, 1. Donc $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

7 Jours de la semaine



Il y a **30** personnes pour **7** jours : $30 > 7$, donc deux personnes au moins sont nées le même jour (principe des tiroirs).

Plus précisément, $\left\lceil \frac{30}{7} \right\rceil = 5$: un même jour compte au moins **5** personnes (si chaque jour en avait au plus **4**, on aurait au plus $28 < 30$ personnes).

8 Une bijection affine



Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $5x - 7 = y$ équivaut à $x = \frac{y+7}{5}$, qui existe et est unique dans $\mathbb{R}$.

Tout y a donc exactement un antécédent : f est bijective.

Sa réciproque est $f^{-1}(y) = \frac{y+7}{5}$.

9 Un trinôme



a. $f(0) = 0 = f(4)$ avec $0 \neq 4$: non injective. Comme $f(x) = (x-2)^2 - 4 \geq -4$, le réel -5 n'a pas d'antécédent : non surjective.

b. Pour $y \geq -4$, $(x-2)^2 = y+4$ donne $x = 2 \pm \sqrt{y+4}$; la condition $x \geq 2$ impose le signe plus. L'antécédent $x = 2 + \sqrt{y+4}$ existe et est unique : f est bijective et $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+4}$.

10 Images directes et réciproques



Sur $[-3; 1]$, f prend la valeur minimale 0 (en 0) et la valeur maximale $f(-3) = 9$; elle est continue donc $f([-3; 1]) = [0; 9]$.

$4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3$, donc $f^{-1}([4; 9]) = [-3; -2] \cup [2; 3]$.

Un carré n'est jamais négatif : $f^{-1}([-5; -1]) = \emptyset$.

11 Sur les entiers relatifs



g : si $n + 3 = m + 3$ alors $n = m$; et pour $k \in \mathbb{Z}$, $k - 3 \in \mathbb{Z}$ est un antécédent. g est bijective, de réciproque $k \mapsto k - 3$.

h : si $2n + 1 = 2m + 1$ alors $n = m$, donc h est injective. Mais $2n + 1$ est toujours impair : 0 n'a pas d'antécédent, h n'est pas surjective.

12 Composer



$(g \circ f)(x) = 3(x + 2) - 1 = 3x + 5$ et $(f \circ g)(x) = (3x - 1) + 2 = 3x + 1$: les deux composées diffèrent.

De $y = 3x + 5$, on tire $(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$. Par ailleurs $g^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$ et $f^{-1}(z) = z - 2$, donc $(f^{-1} \circ g^{-1})(y) = \frac{y+1}{3} - 2 = \frac{y-5}{3}$. Les deux expressions coïncident.

13 Codes sans répétition



L'ordre compte et les chiffres sont distincts : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes.

Avec répétitions : $10^4 = 10\,000$ codes (applications de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans les dix chiffres).

14 Comité et présidence



Première façon. On choisit les 4 membres : $\binom{12}{4} = 495$, puis le président parmi eux : 4 choix. Total : $495 \times 4 = 1980$.

Seconde façon. On choisit d'abord le président : 12 choix, puis les 3 autres membres parmi les 11 restants : $\binom{11}{3} = 165$. Total : $12 \times 165 = 1980$. Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

15 Image directe d'une intersection



- Si $y \in f(A \cap B)$, alors $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $x \in B$, donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$.
- $A \cap B = \{0\}$, donc $f(A \cap B) = \{0\}$. Mais $f(A) = [0; 4] = f(B)$, donc $f(A) \cap f(B) = [0; 4]$, strictement plus grand.
- Soit $y \in f(A) \cap f(B)$: $y = f(a) = f(b)$ avec $a \in A$, $b \in B$. Par injectivité $a = b$, donc $a \in A \cap B$ et $y \in f(A \cap B)$.

16 Une homographie

★★★

Pour $x \neq -2$, $f(x)$ existe. Si $f(x) = 3$, alors $3x + 1 = 3x + 6$, ce qui est impossible : f prend bien ses valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Soit $y \neq 3$. $y = \frac{3x+1}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = 3x+1 \Leftrightarrow x(y-3) = 1-2y \Leftrightarrow x = \frac{1-2y}{y-3}$.

Cet x n'est pas -2 : $\frac{1-2y}{y-3} = -2$ donnerait $1 = 6$. Il y a donc un unique antécédent, f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{1-2y}{y-3}$.

Contrôle : $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-1}{-5/2} = 0$.

17 Composée injective

★★★

a. Si $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ et $x = x'$.

b. $(g \circ f)(1) = g(a) = 1$ et $(g \circ f)(2) = g(b) = 2$: images distinctes, donc

$g \circ f = \text{id}_E$ est injective. Mais $g(a) = g(c) = 1$ avec $a \neq c$: g n'est pas injective.

18 Compter des applications

★★★

a. Chaque élément de E a 6 images possibles : $6^4 = 1296$ applications. Pour une injection, les images sont distinctes : $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

b. Il y a $3^5 = 243$ applications. On retire celles qui manquent au moins un élément : 3 façons d'en exclure un, chacune avec $2^5 = 32$ applications, puis on rajoute celles qui en manquent deux (3 façons, 1 application chacune). Surjections : $243 - 3 \times 32 + 3 \times 1 = 150$.

19 Terme constant

★★★

Le terme général est $\binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{9}{k} x^{18-3k}$. Il est constant si $18 - 3k = 0$, soit $k = 6$. Le terme constant vaut $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$.

Avec $a = b = 1$: $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} = 1024$. Avec $a = 1, b = -1$:
 $\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} = (1 - 1)^{10} = 0$.

20 Points dans un carré

★★★

Découpons le carré en 4 petits carrés de côté 1 (les tiroirs). Cinq points dans quatre carrés : deux points au moins sont dans le même petit carré.

La distance entre deux points d'un carré de côté 1 est au plus la longueur de sa diagonale, $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ces deux points conviennent.

21 Mains de cartes

★★★

a. $\binom{32}{5} = 201\,376$.

b. On choisit 2 cœurs parmi 8 et 3 cartes parmi les 24 non-cœurs :

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 28 \times 2024 = 56\,672.$$

c. On passe au complémentaire : les mains sans as sont prises parmi 28 cartes, soit

$$\binom{28}{5} = 98\,280. \text{ Il y en a donc } 201\,376 - 98\,280 = 103\,096 \text{ avec au moins un as.}$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Applications et dénombrement :
exercices de maths Licence L1

QCM de maths

Applications et dénombrement : QCM de
maths Licence L1

Contrôles de maths

Applications et dénombrement : contrôle
de maths Licence L1

Exercices de maths

Nombres réels et suites : exercices de
maths Licence L1

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths
Licence L1

 QCM de maths

Nombres réels et suites : QCM de maths
Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage