

Algèbre générale et dualité : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Ordres dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$



L'ordre de la classe de k est $\frac{6}{\text{pgcd}(6, k)}$. (1 pt)

k	0	1	2	3	4	5
$\text{pgcd}(6, k)$	6	1	2	3	2	1
ordre	1	6	3	2	3	6

Un élément engendre le groupe si et seulement si son ordre vaut **6** : ce sont **1** et **5**. Réponse : les générateurs sont $\overline{1}$ et $\overline{5}$, et les ordres sont **1, 6, 3, 2, 3, 6**.

2 Une exponentielle comme morphisme



Pour tous réels x, y , $f(x + y) = e^{3x+3y} = e^{3x}e^{3y} = f(x)f(y)$: c'est un morphisme.

Noyau : $e^{3x} = 1 \iff 3x = 0 \iff x = 0$, donc $\ker f = \{0\}$ et f est injective.

Surjectivité : pour $y > 0$, $x = \frac{\ln y}{3}$ vérifie $f(x) = y$. Ainsi f est bijective : c'est un isomorphisme de groupes.

3 Décomposer une permutation



On suit les images : $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$, donc le cycle $(1\ 3\ 5)$; $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, donc $(2\ 4)$; 6 est fixe. Ainsi $\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 4)$.

Ordre : $\text{ppcm}(3, 2) = 6$. Signature : $(-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = 1 \times (-1) = -1$. Réponse : σ est d'ordre 6 et de signature -1 .

4 Somme et intersection d'idéaux de $\mathbb{Z}$



$\text{pgcd}(12, 18) = 6$, donc $12\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$. (1 pt)

$\text{ppcm}(12, 18) = 36$, donc $12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z} = 36\mathbb{Z}$. (1 pt)

Bézout : $6 = 2 \times 12 - 1 \times 18$, car $24 - 18 = 6$. Réponse : $6\mathbb{Z}$, $36\mathbb{Z}$ et $6 = 2 \times 12 - 18$.

5 Division euclidienne par $X - 2$



On trouve $X^3 + 2X^2 - 5X + 1 = (X - 2)(X^2 + 4X + 3) + 7$. Vérification :

$(X - 2)(X^2 + 4X + 3) = X^3 + 2X^2 - 5X - 6$, et $-6 + 7 = 1$.

Le quotient est $X^2 + 4X + 3$ et le reste est 7 . Comme le reste de la division par $X - 2$ est $P(2)$, on a $P(2) = 8 + 8 - 10 + 1 = 7$, ce qui concorde.

6 Déterminant d'ordre 3



Par la règle de Sarrus :

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 2 = 1 - 6 - 8 = -13.$$

Comme $\det A = -13 \neq 0$, la matrice A est inversible.

7 Noyau d'une forme linéaire



φ est linéaire et non nulle ($\varphi(1, 0, 0) = 2$), donc son noyau est un hyperplan, de dimension 2.

Les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 3, 1)$ vérifient $2 - 2 = 0$ et $-3 + 3 = 0$: ils sont dans $\ker \varphi$. Ils sont non colinéaires, donc forment une famille libre de deux éléments dans un espace de dimension 2 : c'est une base.

8 Non commutativité de S_3



$(1\ 2) \circ (2\ 3) : 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, c'est $(1\ 2\ 3)$. $(2\ 3) \circ (1\ 2) :$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1$, c'est $(1\ 3\ 2)$. Les résultats diffèrent : S_3 n'est pas abélien. (1 pt)

Ordres : l'identité 1 ; les trois transpositions 2 ; les deux 3-cycles 3. (1 pt)

Sous-groupes : $\{\text{id}\}$, trois d'ordre 2 (une transposition chacun), un d'ordre 3 (A_3) et S_3 , soit 6 sous-groupes (aucun d'ordre 4 ou 5 par Lagrange). (1 pt)

9 Puissances d'une permutation



Ordre : $\text{ppcm}(4, 3) = 12$. Signature : $(-1)^3 \times (-1)^2 = -1$.

$100 = 8 \times 12 + 4$, donc $\sigma^{100} = \sigma^4 = (1\ 2\ 3\ 4)^4(5\ 6\ 7)^4$ (les cycles commutent). Or $(1\ 2\ 3\ 4)^4 = \text{id}$ et $(5\ 6\ 7)^4 = (5\ 6\ 7)$. Réponse : $\sigma^{100} = (5\ 6\ 7)$.

10 Un idéal de polynômes



$0 \in I$. Si $P, Q \in I$, $(P - Q)(1) = 0$, donc $P - Q \in I$: c'est un sous-groupe additif. Si $P \in I$ et $R \in \mathbb{R}[X]$, $(RP)(1) = R(1)P(1) = 0$, donc $RP \in I$: c'est un idéal. (1 pt)

Si $P \in I$, alors 1 est racine de P , donc $(X - 1) \mid P : P = (X - 1)Q$. Réciproquement tout multiple de $X - 1$ s'annule en 1. Donc $I = (X - 1)\mathbb{R}[X]$. (1 pt)

11 pgcd et relation de Bézout



$A = (X - 1)B + (1 - X^2)$, car $(X - 1)B = X^4 + X^2 - 2$ et $A - (X^4 + X^2 - 2) = 1 - X^2$.

$B = (X + 1)(X^2 - 1) + (3X + 3)$, car $(X + 1)(X^2 - 1) = X^3 + X^2 - X - 1$ et $B - (...) = 3X + 3$.

$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1) = \frac{X - 1}{3}(3X + 3)$: le reste est nul. Le dernier reste non nul est $3X + 3$, donc $\text{pgcd}(A, B) = X + 1$.

12 Un Vandermonde



Vandermonde avec $(a, b, c) = (1, 2, 3) : (2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 1 \times 2 \times 1 = 2$. (1 pt)

Opérations : $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ donnent $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times (8 - 6) = 2$. Les deux méthodes concordent : le déterminant vaut 2. (1 pt)

13 Base duale dans le plan

★★★

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = 1$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Donc $u_1^*(x, y) = x - y$ et

$u_2^*(x, y) = -x + 2y$. Vérification : $u_1^*(2, 1) = 1$, $u_1^*(1, 1) = 0$, $u_2^*(2, 1) = 0$, $u_2^*(1, 1) = 1$.
(1 pt)

Coordonnées de w : $u_1^*(7, 4) = 3$ et $u_2^*(7, 4) = -7 + 8 = 1$. Donc

$w = 3u_1 + u_2 = (6 + 1, 3 + 1) = (7, 4)$. (1 pt)

14 Même noyau, formes proportionnelles

★★★

$\psi = -2\varphi$, donc $\psi(v) = 0 \iff \varphi(v) = 0$: même noyau.

Le vecteur $(0, 3, 1)$ vérifie $\varphi = -3 + 3 = 0$ mais $\chi = -3 + 4 = 1 \neq 0$: il est dans $\ker \varphi$ sans être dans $\ker \chi$. Les noyaux diffèrent (et φ, χ ne sont pas proportionnelles).

15 Groupe d'exposant 2

★★★★

Pour tout x , $x^2 = e$ donne $x^{-1} = x$. Soient $x, y \in G$. Alors xy est lui aussi son propre inverse : $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. Donc G est abélien. (2 pts)

Exemple : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, où tout élément ajouté à lui-même donne $(0, 0)$. (1 pt)

16 Morphismes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

★★★★

Un morphisme f est déterminé par $a = f(\overline{1})$, et l'on doit avoir $12a = f(\overline{12}) = 0$ dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Réciproquement, tout a tel que $12a \equiv 0 \pmod{18}$ définit un morphisme. (1 pt)

$12a \equiv 0 \pmod{18} \iff 2a \equiv 0 \pmod{3} \iff a \equiv 0 \pmod{3}$:

$a \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$. (1 pt)

Il y a donc 6 morphismes, $k \mapsto ak$, ce qui est $\text{pgcd}(12, 18)$. (1 pt)

17 Permutations d'ordre 6 dans S_5

★★★★

L'ordre est le ppcm des longueurs des cycles, dont la somme vaut 5 au plus. Pour obtenir 6, il faut un cycle de longueur 3 et un cycle de longueur 2 (un cycle de longueur 6 est impossible). (1 pt)

On choisit le support du 3-cycle : $\binom{5}{3} = 10$ façons ; il y a 2 3-cycles par support ; la transposition est alors imposée (les deux éléments restants). Total : $10 \times 2 = 20$. (1 pt)

Signature : $(+1) \times (-1) = -1$ pour chacune. (1 pt)

18 Inversibles et équation dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$

★★★★

(a) $\bar{k}$ est inversible si et seulement si $\text{pgcd}(k, 20) = 1 : 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$, soit 8 éléments. (1 pt)

(b) $7 \times 3 = 21 \equiv 1$, donc $7^{-1} = 3$ et $x = 3 \times 3 = 9$. Vérification :

$7 \times 9 = 63 = 60 + 3 \equiv 3$. (1 pt)

(c) $4 \times 5 = 20 \equiv 0$ alors que $4 \neq 0$ et $5 \neq 0$: ce sont des diviseurs de zéro. (1 pt)

19 Reste modulo un produit

★★★★

Le reste a un degré au plus 1 : $R = aX + b$, et $P = (X - 1)(X + 2)Q + R$. On évalue en 1 et -2, racines du diviseur. (1 pt)

$P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ donc $a + b = 0$; $P(-2) = -32 - 12 + 2 = -42$ donc $-2a + b = -42$. (1 pt)

En soustrayant : $-3a = -42$, $a = 14$, $b = -14$. Réponse : $R = 14X - 14$. (1 pt)

20 Dualité et formule de Simpson

★★★

(a) Les polynômes de Lagrange donnent $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_1 = -X(X-2)$,
 $L_2 = \frac{X(X-1)}{2}$: on vérifie $L_i(j) = \delta_{ij}$. (1 pt)

(b) Les coefficients de Φ sont $\Phi(L_i) : \int_0^2 L_0 = \frac{1}{3}$, $\int_0^2 L_1 = \left[-\frac{X^3}{3} + X^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$,
 $\int_0^2 L_2 = \frac{1}{3}$. (1 pt)

Donc $\Phi = \frac{1}{3}\text{ev}_0 + \frac{4}{3}\text{ev}_1 + \frac{1}{3}\text{ev}_2$, c'est-à-dire $\int_0^2 P = \frac{P(0) + 4P(1) + P(2)}{3}$. Test avec
 $P = X^2 : \frac{8}{3} = \frac{0 + 4 + 4}{3}$. (1 pt)

21 Déterminant et rang avec paramètre

★★★

Développement selon la première ligne :

$$\det A(m) = 1(m-1) - 1(1-m) + m(1-m^2) = 2(m-1) - m(m-1)(m+1).$$

On factorise : $(m-1)(2-m^2-m) = -(m-1)(m-1)(m+2)$. Donc

$$\det A(m) = -(m-1)^2(m+2). \text{ (1 pt)}$$

Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, le déterminant est non nul : rang 3. (1 pt)

Si $m = 1$, les trois lignes sont égales : rang 1. Si $m = -2$, les lignes $(1, 1, -2)$ et $(1, -2, 1)$ sont non proportionnelles, donc rang 2 (le déterminant est nul). (1 pt)

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Algèbre générale et dualité : exercices de maths Maths Spé

 QCM de maths

Algèbre générale et dualité : QCM de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Algèbre générale et dualité : contrôle de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Courbes, surfaces et géométrie euclidienne : exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

 QCM de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Maths Spé

Courbes, surfaces et géométrie
euclidienne : QCM de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage